

# 2

## GÉODÉSIE, CARTOGRAPHIE

### 1 GÉNÉRALITÉS ET DÉFINITIONS

La géodésie est une des sciences de base nécessaires au topographe. Sa maîtrise n'est pas indispensable : elle relève du domaine du spécialiste mais un aperçu centré sur les incidences de la forme et des caractéristiques de la terre sur la topographie est indispensable. Ceci permet d'introduire et de justifier les problèmes de projection plane et leurs incidences sur la carte de base, les choix de points et de surfaces de référence pour un système de coordonnées général, etc. Mais, définissons dans un premier temps, le vocabulaire de base.

**Topométrie** : du grec *topos* signifiant **le lieu** et *métrie* signifiant l'opération de **mesurer**. C'est donc l'ensemble des techniques permettant d'obtenir les éléments métriques indispensables à la réalisation d'un plan à grande ou très grande échelle (voir *Lever de détail*, chap. 8).

Ces éléments nécessitent différentes mesures sur le terrain suivies de nombreux calculs, schémas et croquis. C'est un domaine vaste qui demande de nombreuses compétences auxquelles l'outil informatique est aujourd'hui indispensable.

**Topographie** : association de *topos* et de *graphein* qui, en grec, signifie **décrire**. C'est donc la science qui donne les moyens de représentation graphique ou numérique d'une surface terrestre.

La nuance entre ces deux techniques réside dans le fait qu'en topographie le terrain est représenté *in situ* alors qu'en topométrie les calculs et reports sont des phases ultérieures au travail sur le site.

**Topologie** : c'est la science qui analyse les lois générales de la formation du relief par les déformations lentes des aires continentales appelées mouvements épirogéniques,

atténués ultérieurement par les actions externes : érosion due à la mer, au vent, à la glace, à l'eau et à la neige.

**Géodésie** : c'est la science qui étudie la forme de la terre. Par extension, elle regroupe l'ensemble des techniques ayant pour but de déterminer les positions planimétriques et altimétriques d'un certain nombre de points géodésiques et repères de nivellement.

**Cartographie** : c'est l'ensemble des études et opérations scientifiques, artistiques et techniques intervenant à partir d'observations directes ou de l'exploitation d'un document en vue d'élaborer des cartes, plans et autres moyens d'expression. Ci-après, est donnée une classification des cartes en fonction de leur échelle et de leur finalité :

Échelles	Finalité
1/1 000 000 à 1/500 000	Cartes géographiques
1/250 000 à 1/100 000	Cartes topographiques à petite échelle
1/50 000, 1/25 000 (base), 1/20 000	Cartes topographiques à moyenne échelle (IGN)
1/10 000	Cartes topographiques à grande échelle
1/5 000	Plans topographiques d'étude, plans d'urbanisme
1/2 000	Plans d'occupation des sols (POS), descriptifs parcellaires
1/1 000, 1/500	Plans parcellaires, cadastraux urbains
1/200	Plans de voirie, d'implantation, de lotissement
1/100	Plans de propriété, plans de masse
1/50	Plans d'architecture, de coffrage, etc.

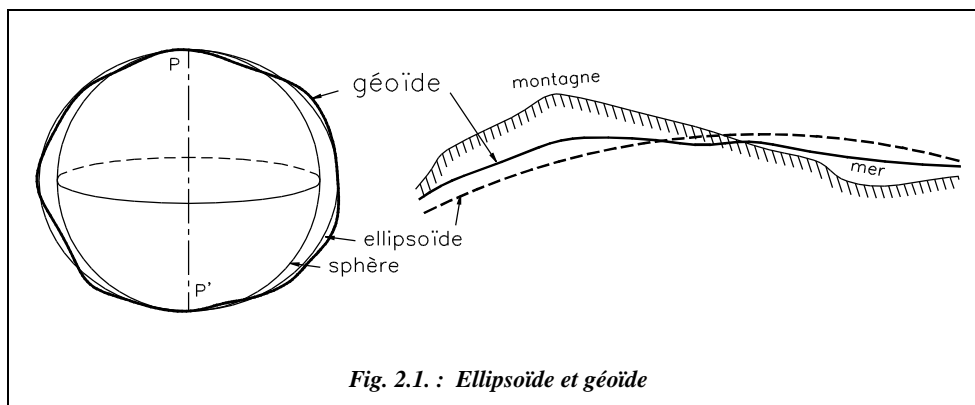
**Canevas** : c'est l'ensemble des points connus en planimétrie et/ou en altimétrie avec une précision absolue homogène.

## 2 FORMES ET DIMENSIONS DE LA TERRE

### 2.1 Géoïde

En apparence la Terre a la forme d'une sphère. En fait, elle est légèrement déformée par la force centrifuge induite par sa rotation autour de l'axe des pôles : la Terre n'est pas un corps rigide. Cette déformation est relativement faible : « tassement » de 11 km au niveau des pôles par rapport à un rayon moyen de 6 367 km et « renflement » de 11 km au niveau de l'équateur. Elle a donc l'aspect d'un ellipsoïde de révolution dont le petit axe est l'axe de rotation : l'axe des pôles (fig. 2.2.).

**La Terre est une surface en équilibre.** La surface du niveau moyen des mers et océans au repos n'a pourtant pas une forme régulière et ne coïncide ainsi pas avec un ellipsoïde de révolution : elle n'est pas régulière mais ondulée, présente des creux et des bosses (fig. 2.1.). Par exemple, la surface de la mer se bombe au-dessus d'un volcan et se creuse au-dessus des grandes fosses océaniques parce que les reliefs créent des excès ou des déficits de matière produisant ainsi des variations locales du champ de pesanteur. Or la surface d'un fluide en équilibre est en tout point normale aux forces de pesanteur : on dit qu'elle est **équipotentielle du champ de pesanteur**. La Terre, non rigide, peut être considérée comme un fluide ; la direction des forces de pesanteur varie d'un endroit à un autre en raison de la répartition hétérogène de la matière composant la Terre ; **sa surface n'est donc pas régulière.**



*Fig. 2.1. : Ellipsoïde et géoïde*

La surface des mers et océans au repos recouvrant toute la Terre est appelée **géoïde** (fig. 2.1.) ; voir aussi le paragraphe 6.1.

Le **géoïde**, niveau des mers prolongé sous les continents, est donc une surface gauche à laquelle on ne saurait appliquer des relations mathématiques de transformation. Il est la surface de référence pour la détermination des altitudes, autrement dit la surface de niveau zéro. En réalité, la référence en altitude dépend du choix du **repère fondamental** et du **système d'altitude**. Il s'ensuit que la surface de niveau zéro est légèrement différente du géoïde ; l'écart est constant et représente l'altitude du point fondamental au-dessus du géoïde (se reporter au paragraphe 6.3.).

#### Remarque

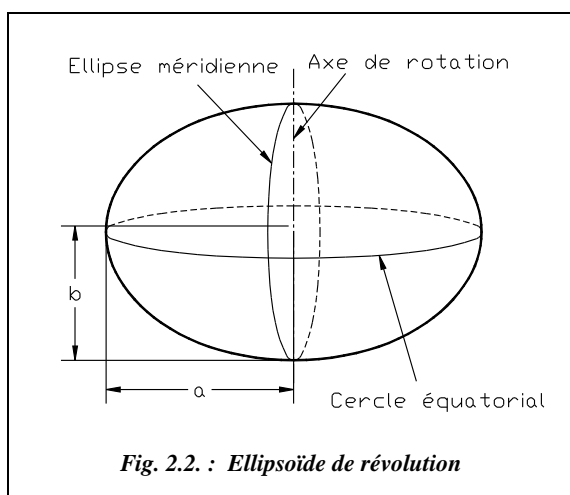
Lorsque le topographe (ou le maçon) cale la bulle de son niveau, il matérialise un plan tangent au géoïde qui correspond à la surface d'équilibre des eaux (pente d'écoulement des eaux nulle). On obtient ainsi **partout** l'orientation de la verticale physique d'un lieu. Il est intéressant de noter qu'aucune autre référence n'offre de telles facilités.

## 2.2 Ellipsoïde de révolution

### 2.2.1 Définitions

La surface la plus proche du géoïde est un **ellipsoïde de révolution**, c'est-à-dire un volume engendré par la rotation d'une ellipse autour d'un de ses deux axes. La terre tournant autour de l'axe des pôles (de demi-longueur  $b$ , fig. 2.2.), cette rotation engendre un cercle équatorial de rayon  $a$ .

Les dimensions de l'ellipsoïde sont déterminées en comparant la distance par mesures géodésiques et la différence de latitude par mesures astronomiques entre deux points d'un même méridien.



Un **méridien** est l'intersection de la surface de l'ellipsoïde avec un plan contenant l'axe des pôles : c'est donc une ellipse.

Un **parallèle** est l'intersection de la surface de l'ellipsoïde avec un plan perpendiculaire à l'axe des pôles : c'est donc un cercle.

Tous les méridiens sont égaux entre eux (à quelques écarts près). Leur rayon de courbure diminue des pôles vers l'équateur, donc leur courbure (inverse du rayon) augmente.

Il n'existe pas un ellipsoïde **global** unique mais plusieurs **ellipsoïdes locaux** définis pour chaque pays, chacun adoptant un ellipsoïde le plus proche possible du géoïde local. Ceci explique que les ellipsoïdes diffèrent d'un pays à l'autre. Pour la géodésie française, on utilise l'ellipsoïde défini en 1880 par **Clarke** et dont les caractéristiques, très légèrement modifiées par l'IGN par rapport à l'ellipsoïde initial, sont les suivantes :

- Demi-grand axe :  $a = 6\,378\,249,20 \text{ m}$
- Demi-petit axe :  $b = 6\,356\,515,00 \text{ m}$
- Aplatissement :  $f = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{293,466\,021\,3}^1$
- Excentricité  $e$  :  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0,006\,803\,487\,646$

<sup>1</sup>  $f$  vient de *flattening* en anglais.

C'est l'ellipsoïde de référence actuellement utilisé comme surface de projection pour l'établissement de cartes et plans assez étendus.

Il a été choisi le plus proche possible du géoïde, c'est pourquoi :

- il est tangent au géoïde au Panthéon, à Paris ;
- les écarts entre géoïde et ellipsoïde ne dépassent pas 14 m en France (voir § 6.1).

Ces caractéristiques sont en cours de modification afin de mettre en place un système international, de plus en plus nécessaire. Le développement du GPS et des travaux de géodésie réalisés au niveau européen imposent ces modifications (voir § 5.3).

## 2.2.2 Autres ellipsoïdes

Comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, d'autres ellipsoïdes ont été ou sont utilisés. Leurs caractéristiques sont les suivantes :

Ellipsoïde	$\frac{1}{2}$ grand axe $a$ (m) $\frac{1}{2}$ petit axe $b$ (m)	Excentricité $e$ $1/\text{aplat. } 1/f$	Syst. géodésique Point fondamental	Projection Méridien origine
<b>Clarke 1880</b>	6 378 249,200 6 356 515,000	0,082 483 256 763 293,466 021 3	NTF Panthéon	Lambert Paris
<b>Hayford 1909</b>	6 378 388,000 6 356 911,946	0,081 991 890 22 297,000 000 0	ED 50 Potsdam	UTM Greenwich
<b>GRS 1980</b>	6 378 137,000 6 356 752,300	0,081 819 218 06 298,257 025	International	
<b>IAGRS 1980</b>	6 378 137,000 6 356 752,314	0,081 819 191 31 298,257 222 101	WGS 84	

L'ellipsoïde **Clarke 1880** (IGN) est associé au système national appelé Nouvelle Triangulation Française utilisant la projection **Lambert** (voir § 3.4).

Le système **WGS 84** (*World Général System 1984*) sert de base au système géocentrique de référence utilisé en GPS (chap. 7 § 1). Son ellipsoïde IAGRS 80 est très proche de GRS 80 (*Geodetic Reference System 1980*).

Le système *European Datum 1950* utilise la projection *Universal Transverse Mercator* (voir § 3.5).

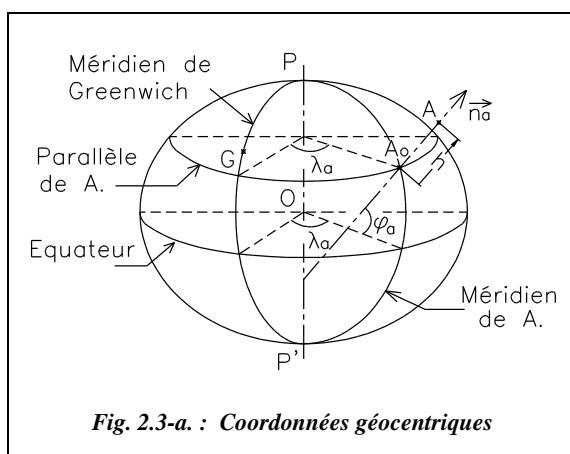
Le tableau suivant donne les décalages d'origine  $t_x$ ,  $t_y$  et  $t_z$  connus à quelques mètres près dans un repère géocentrique défini au paragraphe 2.2.3.1. pour les couples IAGRS 80 - Clarke 80 et Hayford 09 - Clarke 80. Pour le premier couple, sont également donnés le facteur d'homothétie  $k$  et les rotations d'axes  $r_x$ ,  $r_y$ , et  $r_z$ .

Ces paramètres permettent de transformer les coordonnées de points d'un système à un autre par une similitude euclidienne (adaptation du type Helmert définie au tome 2, chapitre 1, § 10.3) à trois ou à sept paramètres selon la précision cherchée (voir aussi tome 2 chap. 5 § 8.2.8). Pour la cartographie à petite échelle, la précision de quelques mètres est suffisante et on peut ainsi se contenter de cette similitude à trois paramètres. Pour plus de précision (décimétrique), on utilise une similitude à sept paramètres déterminés localement par observation de points connus dans deux systèmes différents. Par exemple, dans les prochaines éditions de ses fiches de points géodésiques, l'IGN proposera les paramètres de la transformation à trois ou sept paramètres la mieux adaptée à chaque lieu pour passer du système WGS 84 (ellipsoïde IAGRS 80) au système NTF (ellipsoïde Clarke 80) puis au système RGF 93 (voir § 5.3).

De : Vers :	IAGRS 80 Clarke 80	Hayford 09 Clarke 80
<b>tx (m)</b>	168	84
<b>ty (m)</b>	60	- 37
<b>tz (m)</b>	- 320	- 437
<b>rx (gon)</b>	0	
<b>ry (gon)</b>	0	
<b>rz (gon)</b>	- 0,554	
<b>k = 1 + d</b>	$1 - 21,98 \cdot 10^{-8}$	

## 2.2.3 Systèmes de coordonnées

### 2.2.3.1 Système géocentrique



Un système de référence géocentrique est un repère (O, X, Y, Z) (fig. 2.3-a.) tel que :

- O est proche du centre des masses de la terre (au mieux à quelques dizaines de mètres près pour les systèmes réalisés par géodésie spatiale) ;
- l'axe OZ est proche de l'axe de rotation terrestre ;
- le plan OXZ est proche du plan du méridien origine.

Dans un système de référence géodésique, un point de la croûte terrestre est considéré fixe bien qu'il soit soumis à de faibles mouvements, dus aux marées terrestres, d'une amplitude inférieure à 30 cm et aux mouvements tectoniques, provoquant des déplacements inférieurs à 10 cm par an.

### 2.2.3.2 Système Géographique

L'axe de rotation de la terre est l'axe des pôles  $PP'$ . Le cercle perpendiculaire à l'axe des pôles est l'équateur. La demi-ellipse méridienne passant par les pôles et par un point  $A$  est la méridienne de  $A$  (fig. 2.3-b.).

Un point sur l'ellipsoïde est repéré par sa **longitude** et sa **latitude** (rapportées à la normale ( $n_a$ ) à l'ellipsoïde en  $A$ ).

Elles sont définies ci-après.

- **Longitude ( $\lambda$ )** : la longitude  $\lambda$  d'un lieu  $A$  est l'angle dièdre formé par le méridien du lieu avec le méridien origine. Elle est comprise entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$  Est ou Ouest. Le méridien origine international est celui de Greenwich (observatoire de la banlieue de Londres).
- **Latitude ( $\varphi$ )** : la latitude de  $A$  est l'angle  $\varphi$  que fait la verticale ( $n_a$ ) de  $A$  avec le plan de l'équateur. Elle est comprise entre  $0$  à  $90^\circ$  Nord ou Sud. Les cercles perpendiculaires à la ligne des pôles  $PP'$  sont appelés parallèles : ils sont parallèles au plan de l'équateur.

**Hauteur ellipsoïdale ( $h$ )** : à un point  $A'$  situé sur la surface de la terre et sur la même verticale que  $A$ , on associera une troisième coordonnée correspondant à la hauteur au-dessus de l'ellipsoïde, notée  $h$ , mesurée suivant la normale ( $n_a$ ).

#### Remarque

Par la suite, nous parlerons plus volontiers de **coordonnées géodésiques** puisqu'elles sont associées à un ellipsoïde donc à un système géodésique donné.

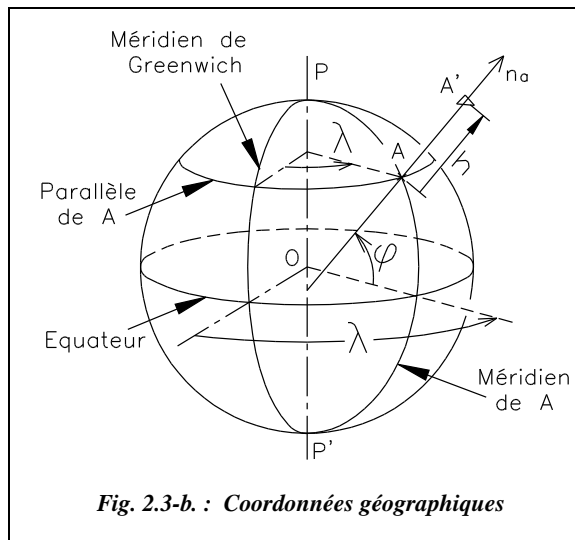


Fig. 2.3-b. : Coordonnées géographiques

### 2.2.4 Systèmes géodésiques

Un système géodésique est défini par :

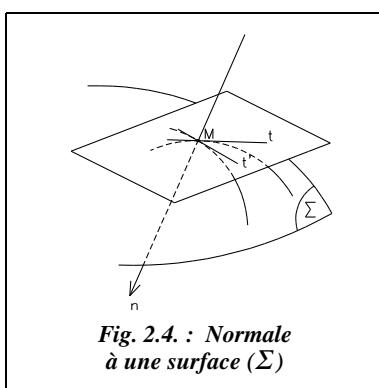
- un ellipsoïde, choisi le plus proche possible du géoïde local ;
- un système de représentation plane ;
- un point fondamental (sauf dans le cas d'un système géocentrique où il n'y a pas de point fondamental) dont les coordonnées sont déterminées par des mesures astronomiques ; en ce point, la normale à l'ellipsoïde est confondue avec la verticale c'est-à-dire la normale au géoïde.

La réalisation d'un système géodésique est concrétisée sur le terrain par un réseau de points connus en coordonnées dans ce système. Cette réalisation étant fonction des techniques de mesure, de calcul et de leurs évolutions, il peut exister plusieurs réalisations d'un même système géodésiques.

## 2.3 Calculs sur l'ellipsoïde

### 2.3.1 Courbes sur une surface

#### 2.3.1.1 Normale, plan tangent et courbure

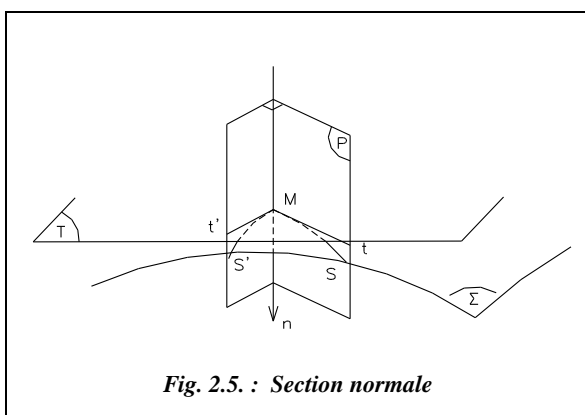


Toutes les tangentes ( $Mt$ ,  $Mt'$ ) aux courbes tracées au point  $M$  sur une surface ( $\Sigma$ ) sont dans un même plan appelé **plan tangent au point  $M$  à ( $\Sigma$ )**.

La perpendiculaire au point  $M$  au plan tangent est appelée **normale  $\vec{n}$**  à la surface.

La **courbure** est l'inverse du rayon  $\Gamma = \frac{1}{R}$ .

#### 2.3.1.2 Section normale



Un plan contenant la normale ( $\vec{n}$ ) coupe la surface ( $\Sigma$ ) selon une courbe plane appelée **section normale**. Quand le plan normal ( $P$ ) pivote autour de la normale ( $\vec{n}$ ), la courbure de la section varie entre deux valeurs extrêmes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  (fig. 2.5.).

Ces deux valeurs correspondent à deux sections normales perpendiculaires ( $S$ ) et ( $S'$ ) appelées **sections normales principales**.

La **courbure totale** de la surface en  $M$  est le produit  $\Gamma.\Gamma'$ . On note que cette courbure totale, produit de deux courbures, n'est pas homogène à une courbure.

Appliquons ces propriétés à l'**ellipsoïde de révolution**.



Les sections normales principales en M (fig 2.6.) sont les suivantes :

- **l'ellipse méridienne**, qui est la trace de l'ellipsoïde de révolution autour de l'axe des pôles sur le plan de cet axe ; son rayon de courbure est CM ; on le note  $\rho$  ;
- **la section normale perpendiculaire** de rayon de courbure JM noté  $v$  ; ce rayon est appelé grande normale et parfois noté  $(\vec{N})$ . J est l'intersection de la normale et du petit axe.

La courbure totale est :  $\Gamma = \frac{1}{v \cdot \rho}$ .

Si le point M est sur l'équateur, la section normale à l'ellipse méridienne est l'équateur et le rayon de courbure est :  $JM = a$  ; J est situé au point O.

Si le point M est aux pôles, la section perpendiculaire à l'ellipse méridienne est aussi une ellipse méridienne : alors  $\rho = v$ .

En définissant l'excentricité  $e$  telle que :  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$  ; on démontre que :

d'une part  $\rho = \frac{a(1 - e^2)}{w^3}$  avec  $w = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}$  ;

d'autre part  $v = \frac{a}{w}$  ( $e^2 = 6,803\,487\,646 \cdot 10^{-3}$ , ellipsoïde de Clarke).

On retrouve alors que :

- pour un angle  $\varphi$ , tel que  $\varphi = 0$  gon à l'équateur, on obtient :  $v = a \approx 6\,378,25$  km : c'est le rayon du cercle correspondant à l'équateur ; le point J se situe au point O ;  $\rho = b^2/a \approx 6\,334,85$  km : c'est le rayon de courbure à l'équateur de l'ellipse méridienne.
- pour un angle  $\varphi$  tel que  $\varphi = 100$  gon au pôle, J et C sont confondus ;  $\rho = v = a^2/b \approx 6\,400,06$  km : c'est le rayon de courbure des ellipses méridiennes aux pôles.

### Exemple

Sur le parallèle  $\varphi = 49$  gon, on a :

- le rayon de courbure de l'ellipse méridienne  $\rho \approx 6\,366,29$  km.
- le rayon de courbure de l'ellipse normale principale  $v \approx 6\,388,78$  km.

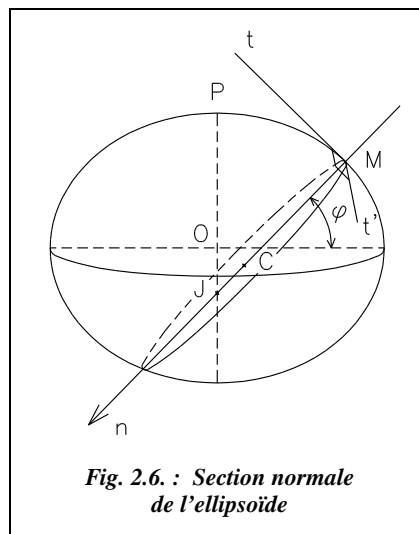


Fig. 2.6. : Section normale de l'ellipsoïde

### 2.3.1.3 Courbe quelconque sur une surface

Considérons une courbe gauche sur laquelle est définie en M une tangente Mt. Le plan limite P de deux tangentes infiniment voisines est appelé plan osculateur et la perpendiculaire à la courbe située dans ce plan est la normale principale ( $\vec{N}$ ).

En général, la normale principale est différente de la normale à la surface ( $\vec{n}$ ).

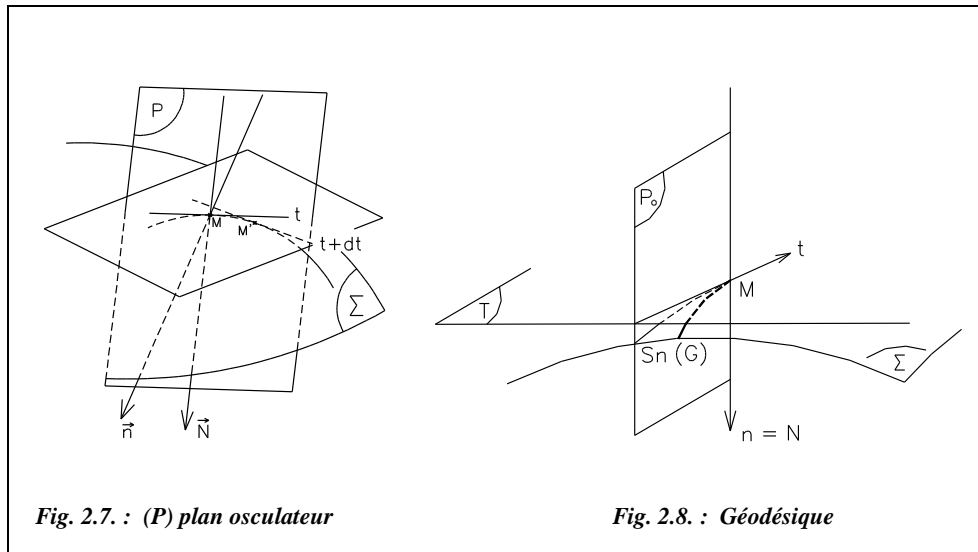


Fig. 2.7. : (P) plan osculateur

Fig. 2.8. : Géodésique

Les courbes telles que ( $\vec{N}$ ) confondu avec ( $\vec{n}$ ) sont appelées géodésiques ; elles ont des propriétés intéressantes puisque :

- entre deux points, la géodésique est la ligne de longueur minimale ;
- la courbure d'une géodésique est la courbure de la section normale qui lui est tangente.

## 2.3.2 Géodésiques

### 2.3.2.1 Géodésiques de la sphère

Les géodésiques de la sphère sont des grands cercles. En tous points de ces cercles, la normale principale passe par le centre de la sphère ; elle est donc confondu avec la normale à la sphère. Les angles compris entre une géodésique et les méridiens sont tous différents.

Pour aller du point M au point M', le plus court chemin est la géodésique ; ces grands cercles, trajectoires de longueur minimale, sont appelés **orthodromie** (fig. 2.9.).

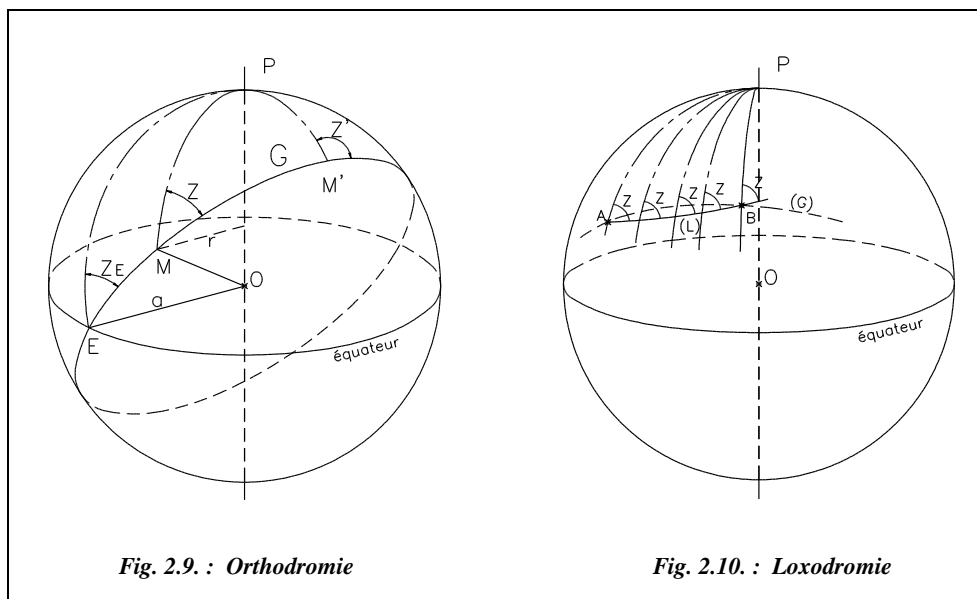


Fig. 2.9. : Orthodromie

Fig. 2.10. : Loxodromie

On définit la **loxodromie** comme une courbe qui coupe tous les méridiens sous un azimut constant  $Z$  (voir la définition d'un azimut au § 4.2) ; entre les deux points A et B, le chemin le plus court est la géodésique ; la loxodromie, plus facile à suivre, oblige à parcourir un trajet plus long (fig. 2.10.).

### 2.3.2.2 Géodésiques de l'ellipsoïde

Entre deux points A et B de l'ellipsoïde passe une géodésique (G) qui représente la trajectoire la plus courte de A à B. (G) est une courbe gauche, très voisine des sections normales ( $n_a B$ ) et ( $n_b A$ ).

Les angles mesurés depuis les points A et B sont les angles dièdres entre les plans verticaux contenant chacun des points visés A et B, l'arête étant la verticale de chaque station ; on assimile les verticales de chaque station aux normales à la surface et les traces des plans verticaux aux géodésiques joignant les points.

Le point B est repéré depuis le point A par l'azimut  $Az$  (fig. 2.11.). L'angle est compté positif en sens horaire depuis le méridien de A vers la visée AB, et la distance AB est la longueur de la géodésique.

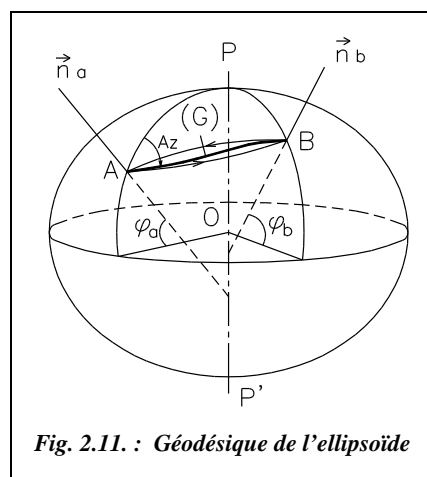


Fig. 2.11. : Géodésique de l'ellipsoïde

## 2.4 Conclusion

Il n'existe pas de calculs trigonométriques sur l'ellipsoïde. On est donc amené à utiliser la trigonométrie sphérique (tome 2 chap. 5 § 4.4) et à adopter **la sphère se rapprochant le plus de l'ellipsoïde dans la région considérée**.

Son rayon  $R_N$  est égal à :  $R_N = \sqrt{\rho \cdot \nu}$

Au voisinage du parallèle 49 gon pour l'ellipsoïde Clarke 1880, on a  $R_N = 6\,377,53$  km.

En reprenant les expressions de  $\rho$  et  $\nu$ , rayons de courbure des sections normales principales, (§ 2.3.1.2), on obtient :

$$R_N = \frac{a \cdot \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

avec :  $a$ , longueur du demi grand axe de l'ellipsoïde en mètre;  
 $e$ , excentricité (§ 2.2.2) ;  
 $\varphi$ , latitude de la région considérée.

### Application

- a) Calculez le rayon  $R_N$  de la sphère au voisinage des parallèles 52 gon et 55 gon.
- b) Calculez le rayon de la sphère  $R_N$  aux latitudes extrêmes de la France métropolitaine (environ 47 et 57 gon).

### Réponse

- a) 6 379,58 et 6 381,62 km.
- b) 6 376,16 et 6 382,96 km. On peut donc prendre comme valeur moyenne de  $R_N$  en France :  $R_N \approx 6\,380$  km. On trouve aussi comme valeur moyenne du rayon terrestre  $R = \frac{a + b}{2} \approx 6\,367$  km.

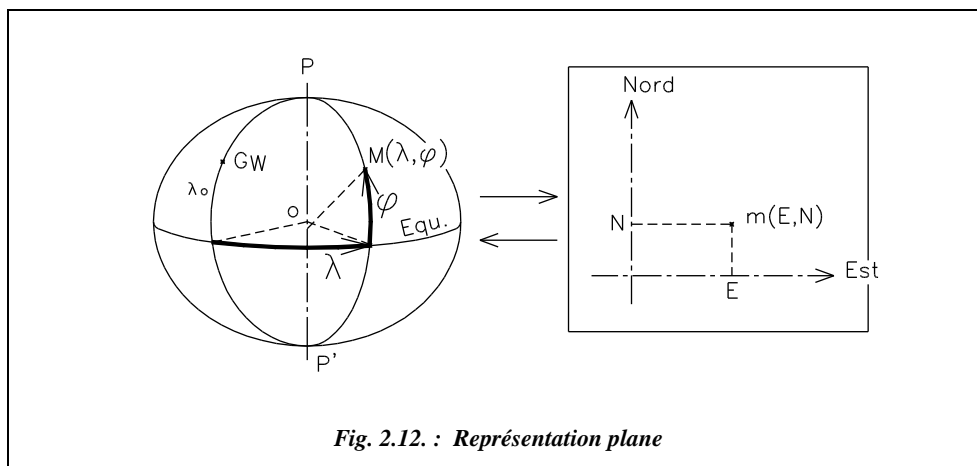
## 3 REPRÉSENTATION PLANE DE L'ELLIPSOÏDE

### 3.1 Introduction

Tous les systèmes de projection de la surface d'un ellipsoïde sur un plan déforment les longueurs.

Par suite, la représentation plane de l'ellipsoïde n'est qu'une **correspondance ponctuelle** entre points de l'ellipsoïde  $M(\lambda, \varphi)$  et points du plan  $m(E, N)$ ,  $E$  pour coordonnée Est (ou  $x$ ) et  $N$  pour Nord (ou  $y$ ) (fig. 2.12.).

Les figures tracées sur l'ellipsoïde seront donc déformées quelle que soit la représentation adoptée.



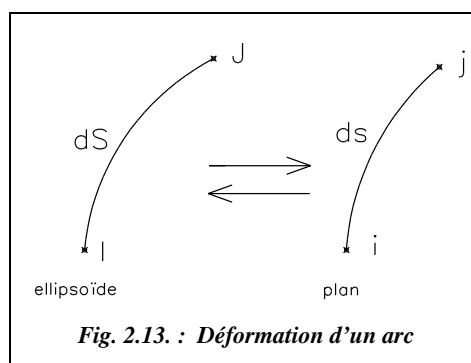
## 3.2 Déformations des figures

### 3.2.1 Calcul du module linéaire

Soit un arc de courbe  $\widehat{IJ}$  sur l'ellipsoïde auquel correspond un arc de courbe  $\widehat{ij}$  sur le plan (fig. 2.13.). On appelle **module linéaire**  $m$  le rapport :

$$m = \frac{\widehat{ij}}{\widehat{IJ}} = \frac{ds}{dS}$$

On remarque que le module linéaire  $m$  varie avec la position de  $I$  et la direction de  $IJ$ .



$m$  est aussi appelé **module de réduction à la projection** : c'est le rapport de la longueur de l'image sur un plan de projection d'une courbe à la longueur de la courbe sur l'ellipsoïde.

### 3.2.2 Indicatrice de Tissot

En un point I, l'élément d'arc  $\widehat{IJ}$  de longueur  $dS$  a pour image  $\widehat{ij}$  de longueur  $m \cdot dS = ds$ . Lorsque J décrit le cercle de centre I de rayon  $dS$ , j décrit autour de i une ellipse de rayon vecteur  $ds = m \cdot dS$ . L'image du cercle de rayon  $dS = 1$  est une ellipse de demi-axes  $a$  et  $b$ , appelée indicatrice de Tissot (fig. 2.14.).

L'indicatrice de Tissot représente localement les variations de  $m$  ; elle change de dimensions en tout point.

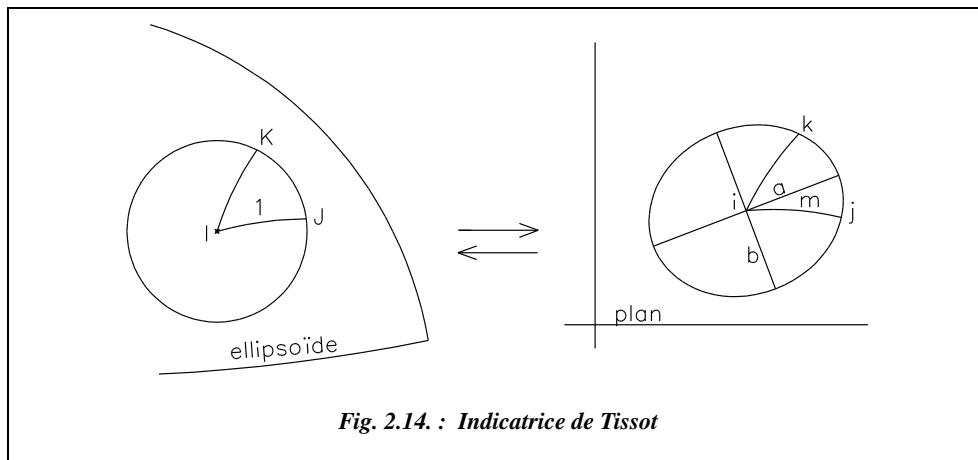


Fig. 2.14. : Indicatrice de Tissot

### 3.2.3 Altérations linéaire et angulaire

Le coefficient d'altération linéaire est défini par :  $k = \frac{ds - dS}{dS} = m - 1$

L'altération angulaire est la différence des angles entre les arcs élémentaires correspondants, soit  $(\widehat{ij}, \widehat{ik}) - (\widehat{IJ}, \widehat{IK})$ .

## 3.3 Classification des représentations

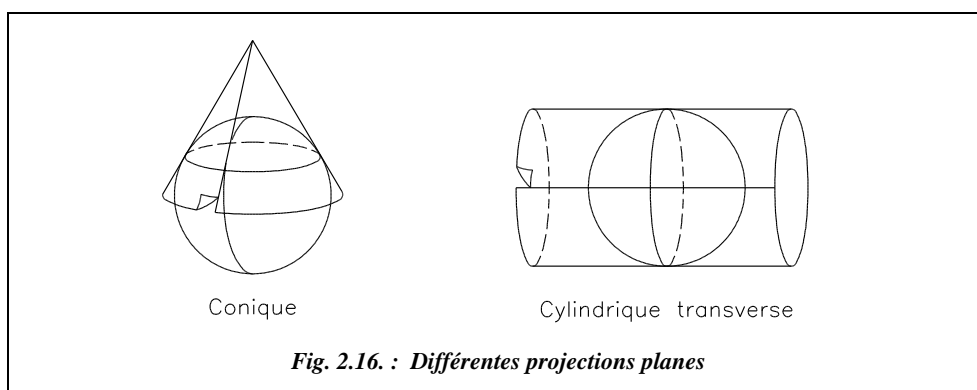
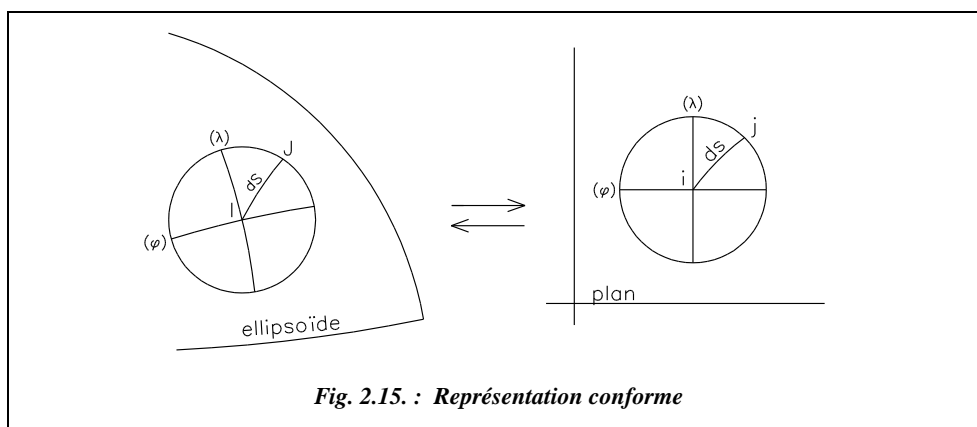
Toutes les représentations déforment les distances. Il est toutefois possible de calculer des correspondances.

- Si les angles entre courbes correspondantes sont égaux, on dit que la représentation est **conforme**.  $m$  est uniquement fonction du point I et indépendant de la direction IJ ; l'indicatrice de Tissot est un cercle (fig. 2.15.).

On utilise principalement deux types de représentation :

- le système de projection **conique** où l'ellipsoïde est projeté sur le cône tangent à un parallèle ; donc seule la région proche de celui-ci est correctement représentée ;

le système de projection **cylindrique** où l'ellipsoïde est projeté sur un cylindre circonscrit le long de l'équateur ou d'un méridien ; dans ce dernier cas, la représentation est dite *cylindrique transverse* (fig. 2.16.) ; le développement du cylindre permet de ne représenter correctement que les seules régions voisines du méridien de tangence.



- **Si les surfaces des figures élémentaires sont égales, on dit alors que la représentation est équivalente.**

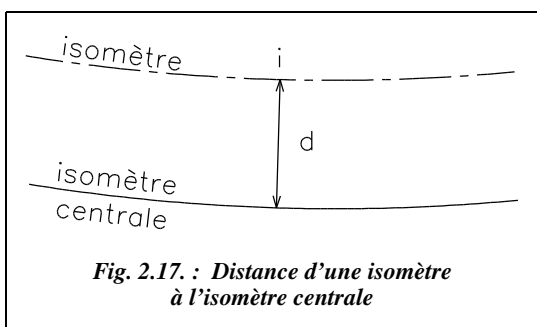
Par exemple, la projection de Bonne, utilisée par F. Bonne au XVIII<sup>e</sup> siècle pour établir la carte d'état-major au 1/80 000, est déduite de la projection conique dont le parallèle origine et le méridien origine sont conservés. On trace les parallèles concentriques au parallèle origine après avoir reporté leurs espacements le long du méridien origine. On trace ensuite les méridiens après avoir reporté leurs espacements sur chaque parallèle ; on obtient alors des quadrilatères dont les dimensions (espacements des parallèles et des méridiens) sont conservées, donc la superficie l'est également. Mais les angles et les distances étant déformés, ces altérations sont aujourd'hui inacceptables pour dresser les nouvelles cartes de base au 1/20 000.

## 3.4 Représentation conique, directe, tangente et conforme : représentation de Lambert

### 3.4.1 Généralités sur les représentations planes conformes

#### 3.4.1.1 Module linéaire $m$

Le module linéaire  $m$  garde une valeur constante le long de lignes appelées **isomètres** ; il est toujours positif, jamais nul. La ligne sur laquelle  $m$  est à son minimum s'appelle l'**isomètre centrale**.



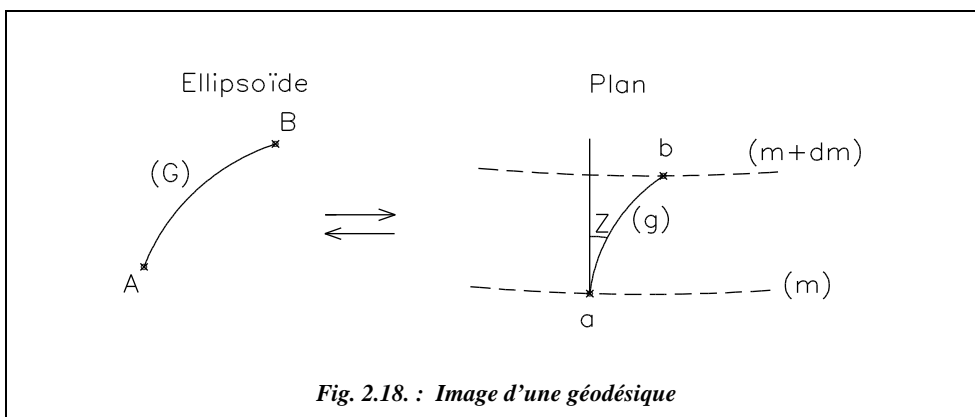
L'isomètre sur laquelle  $m = 1$  (sans déformation), est le parallèle de tangence du cône.

$m$  est fonction de la distance  $d$  (dans le plan, fig. 2.17.) entre le point  $i$  et l'isomètre centrale ; cette fonction est du type  $m = 1 + c d^2$  où  $c$  est une constante,  $d$  en m ou km et  $c$  en  $m^{-2}$  ou  $km^{-2}$  (voir démonstration au paragraphe 3.4.2.1.).

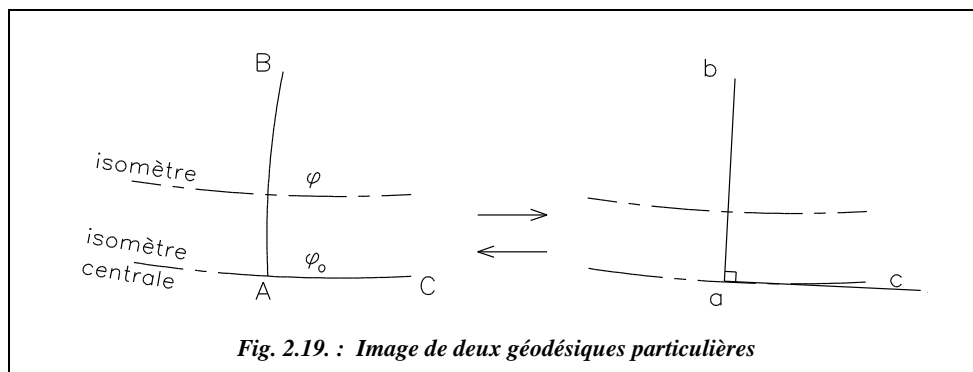
Aussi, le **coefficient altération linéaire** est :  $k = m - 1$

#### 3.4.1.2 Image d'une géodésique ( $G$ ) de l'ellipsoïde

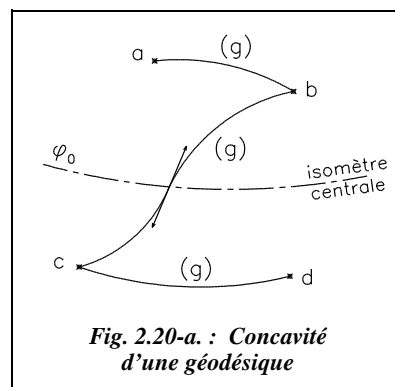
L'image plane ( $g$ ) de la géodésique ( $G$ ) n'est pas une droite mais une courbe quelconque ( $g$ ) (ab, fig. 2.18.). La courbure de ( $g$ ) est nulle dans la direction perpendiculaire aux isomètres ainsi que sur l'isomètre centrale. L'image d'un **arc élémentaire de ( $g$ )** est un **segment de droite** (ab ou ac, fig. 2.19.).







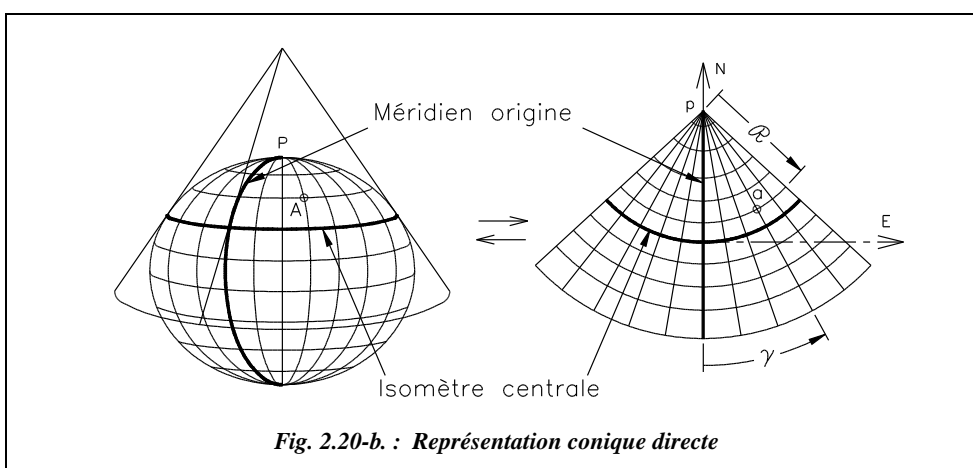
La concavité de l'image plane (g) est tournée vers l'isomètre centrale. Exemple : arcs ab et cd, fig. 2.20-a. Lorsque la transformée (g) de la géodésique (G) coupe l'isomètre centrale, leur point d'intersection est pour l'image plane (g) un point d'inflexion.



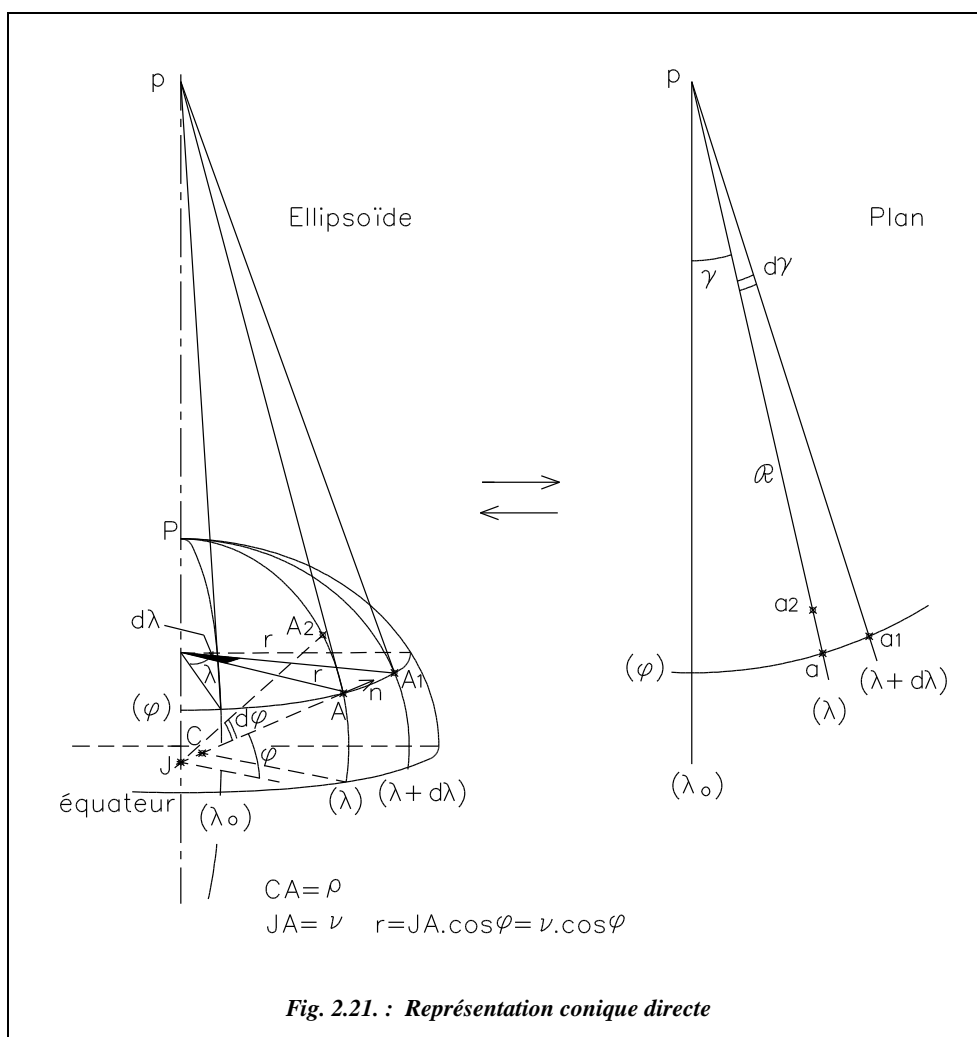
### 3.4.1.3 Représentation conique directe

Dans une telle représentation (fig. 2.20-b.) :

- les méridiens ont pour image des **droites concourantes** au point p, image du pôle P ;
- les parallèles ont pour image des **cercles concentriques** de centre p et de rayon  $\mathcal{R}$ . L'espacement irrégulier des parallèles permet d'assurer la conformité de la projection ;



- le point A de l'ellipsoïde de coordonnées géographiques  $(\lambda, \varphi)$  a pour image sur le plan le point a de coordonnées polaires  $(\mathcal{R}, \gamma)$  telles que :  $\mathcal{R} = f(\varphi)$  et  $\gamma = g(\lambda)$ . Ces relations sont indépendantes (fig. 2.21.).



#### 3.4.1.4 Représentation conforme

Dans une représentation conforme, il y a égalité du module linéaire en un point dans toutes les directions autour de ce même point, et en particulier en direction du parallèle et du méridien. Donc,  $m_\varphi = m_\lambda$  ( $m_\varphi$  est le module dans la direction du parallèle de latitude  $\varphi$  et  $m_\lambda$  le module dans la direction du méridien de longitude  $\lambda$ ). Ils sont définis par :

$$m_\varphi = \frac{aa_1}{AA_1} \approx \frac{\mathcal{R} \cdot d\gamma}{r \cdot d\lambda} \text{ et } m_\lambda = \frac{aa_2}{AA_2} \approx \frac{-d\mathcal{R}}{\rho \cdot d\varphi}$$

où  $r$  est le rayon du parallèle de latitude  $\varphi$ ,  
 $\mathcal{R}$  est le rayon du cercle image sur le plan du parallèle de latitude  $\varphi$ ,  
 $\rho$  est le rayon de courbure de l'ellipse méridienne.

D'où on détermine la convergence des méridiens  $\gamma$  par intégration :

$$\frac{d\gamma}{d\lambda} = -\frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}} \frac{r}{\rho \cdot d\varphi} \quad [1]$$

Ces deux dérivées sont indépendantes donc égales à une constante  $K$ .

On en déduit  $\frac{d\gamma}{d\lambda} = K$  [2], d'où  $\boxed{\gamma = K \cdot (\lambda - \lambda_o)}$

$\gamma$  est la convergence des méridiens ;  
 $\lambda_o$  est la longitude du méridien origine ; dans la représentation Lambert, le méridien origine est le méridien de Paris.

Par ailleurs, de [1] et [2] on déduit que :  $\frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = -K \frac{\rho \cdot d\varphi}{r} = -K \frac{\rho \cdot d\varphi}{v \cdot \cos \varphi} = -K \cdot d\mathcal{L}$  [3]

Par intégration de [3], on obtient la **latitude isométrique  $\mathcal{L}$**  :

$$\boxed{\mathcal{L} = \int \frac{\rho \cdot d\varphi}{v \cdot \cos \varphi} = \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \frac{e}{2} \cdot \ln \frac{1 + e \cdot \sin \varphi}{1 - e \cdot \sin \varphi}}$$

$\mathcal{L}$  est exprimé en radians ;  
 $e$  est l'excentricité définie au paragraphe 2.2.1.

En intégrant [3], on obtient :  $\mathcal{R} = C \cdot \exp(-K\mathcal{L})$

On remarque que  $C = \mathcal{R}$  pour  $\varphi = 0$ . La constante  $C$  est donc égale au rayon du cercle-image de l'équateur  $\mathcal{R}_E$ .

### 3.4.1.5 Représentation tangente

Une représentation tangente admet pour isomètre centrale un parallèle de latitude  $\varphi_o$

(fig. 2.22.). Sur l'isomètre centrale, le module linéaire est  $m_\lambda = \frac{\mathcal{R}_o}{r_o} K = 1$  ;

donc  $K = \frac{r_o}{\mathcal{R}_o} = \frac{v_o \cos \varphi_o}{\mathcal{R}_o}$  ; or  $\sin \varphi_o = \frac{r_o}{\mathcal{R}_o}$  ; on en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned} K &= \sin \varphi_o \\ \gamma &= (\lambda - \lambda_o) \sin \varphi_o \\ \mathcal{R}_o &= v_o \cdot \cot \varphi_o \end{aligned}}$$

À partir de [3], par intégration entre l'isomètre centrale  $\varphi_o$  et un parallèle  $\varphi$ , on obtient :

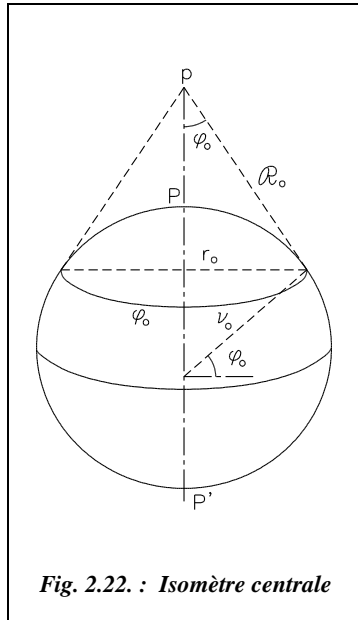


Fig. 2.22. : Isomètre centrale

$$\int_{\varphi_o}^{\varphi} \frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = - \int_{\varphi_o}^{\varphi} K \cdot d\mathcal{E}$$

$$\text{d'où } \ln \mathcal{R} - \ln \mathcal{R}_o = -K \cdot (\mathcal{E} - \mathcal{E}_o)$$

$$\text{donc } \ln \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_o} = -K \cdot (\mathcal{E} - \mathcal{E}_o)$$

$$\text{et } \boxed{\mathcal{R} = \mathcal{R}_o \cdot \exp[-(\mathcal{E} - \mathcal{E}_o) \sin \varphi_o]}$$

#### Application

Calculer le rayon  $\mathcal{R}$  et la convergence des méridiens  $\gamma$  pour le point ayant pour caractéristiques  $\varphi = 54,273\,618$  gon,  $\lambda = 2,607\,614\,3$  gon, origine Greenwich, ces coordonnées géographiques étant données sur l'ellipsoïde Clarke 80. Le parallèle de tangence est situé à  $\varphi_o = 55$  gon. Le méridien de Paris est à  $\lambda_o = 2,596\,921\,296$  gon ( $2^\circ\,20'\,14,024\,999''$ ) à l'Est de Greenwich.

#### Réponse

$$\gamma = 0,008\,131\,024 \text{ gon} ;$$

$$\mathcal{E} = 0,974\,594\,822 \text{ rad}, \quad \mathcal{E}_o = 0,991\,996\,665 \text{ rad}, \quad \mathcal{R}_o = 5\,458\,286,187 \text{ m} ;$$

$$\mathcal{R} = 5\,530\,992,755 \text{ m}.$$

### 3.4.2 Module linéaire et altération linéaire

#### 3.4.2.1 Calcul de la valeur du module linéaire ou module de réduction à la projection

Dans une zone voisine de l'isomètre centrale de latitude  $\varphi_o$ , le module linéaire  $m$  est

défini par  $m = 1 + \frac{d^2}{2R^2}$  où  $R^2 = v \cdot \rho$  et  $d$  est la distance du point à l'isomètre centrale  $\varphi_o$ .

Démontrons ce résultat en nous reportant à la figure 2.21. du paragraphe 3.4.1.3. ci-avant.

Les points A et A<sub>2</sub> étant très proches, on assimile l'arc AA<sub>2</sub> à la tangente en A (ou en A<sub>2</sub>) ; ainsi, dans le triangle rectangle AHA<sub>2</sub>, AH = dr (dr négatif), l'angle A<sub>2</sub> est égal à  $\varphi$ . On a :  $dr = -AA_2 \cdot \sin \varphi$  ; or  $AA_2 = \rho \cdot d\varphi$  ;

$$\text{d'où } \frac{dr}{d\varphi} = -\rho \cdot \sin \varphi .$$

En reprenant l'équation [3] du paragraphe 3.4.1.4,

on obtient :  $\frac{dR}{d\varphi} = -K \frac{\rho \cdot R}{r}$ .

Le module linéaire  $m = \frac{R}{r} K$  peut s'exprimer en fonction de  $\varphi$ , parallèle voisin de l'isomètre centrale  $\varphi_o$ , et se développer comme suit :

$$m(\varphi_o) = 1 \text{ le long de } \varphi_o$$

$$m(\varphi) = m(\varphi_o)$$

$$+ \left[ \frac{dm}{d\varphi} \right]_0 (\varphi - \varphi_o) + \left[ \frac{d^2m}{d\varphi^2} \right]_0 \frac{(\varphi - \varphi_o)^2}{2} + \varepsilon(\varphi) ;$$

or  $\left[ \frac{dm}{d\varphi} \right]_0 = 0$  car  $m = 1$  sur l'isomètre centrale de latitude  $\varphi_o$  ;

$$\text{d'où } m(\varphi) = 1 + \left[ \frac{d^2m}{d\varphi^2} \right]_0 \cdot \frac{(\varphi - \varphi_o)^2}{2} + \varepsilon(\varphi) .$$

Pour déterminer  $\frac{d^2m}{d\varphi^2}$  on sait que  $m = \frac{R}{r} K$

donc :

$$\frac{dm}{d\varphi} = K \cdot \frac{r \frac{dR}{d\varphi} - R \frac{dr}{d\varphi}}{r^2} = -\frac{K}{r^2} (K \cdot \rho \cdot R - R \cdot \rho \sin \varphi) = -\frac{K \cdot R \cdot \rho}{r^2} (K - \sin \varphi)$$

en dérivant à nouveau par rapport à  $\varphi$ , on obtient  $\left[ \frac{d^2m}{d\varphi^2} \right]_0 = \frac{K \cdot R_o \cdot \rho_o}{r_o^2} \cdot \cos \varphi_o$  suivi

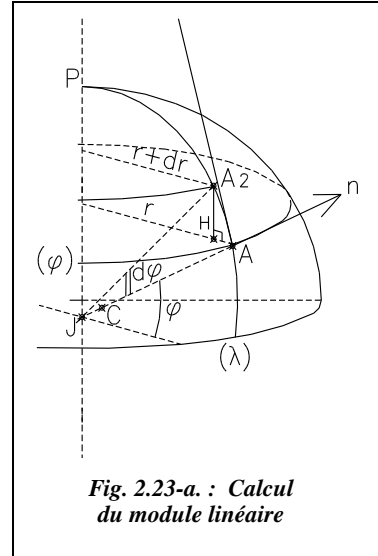
de trois termes dans lesquels  $(K - \sin \varphi_o)$  est en facteur ; or  $K = \sin \varphi_o$ .

Nous savons que  $R_o = v_o \cot \varphi_o$  et  $r_o = v_o \cos \varphi_o$  donc  $\left[ \frac{d^2m}{d\varphi^2} \right]_0 = \frac{\rho_o}{v_o}$

d'où  $m(\varphi) = 1 + \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi - \varphi_o)^2 + \varepsilon(\varphi)$  avec  $\varphi$  et  $\varphi_o$  en radian.

$\rho_o (\varphi - \varphi_o)$  représente la longueur de l'arc sur l'ellipse méridienne entre les latitudes  $\varphi$  et  $\varphi_o$  ; c'est donc la distance entre l'isomètre centrale et le parallèle  $\varphi$ . Soit  $d$  cette distance, on obtient alors :

$$m(\varphi) \approx 1 + \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi - \varphi_o)^2 = 1 + \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot \left( \frac{d}{\rho_o} \right)^2 \approx 1 + \frac{d^2}{2R^2} \text{ en assimilant } v_o \cdot \rho_o = R^2.$$



L'altération linéaire s'exprime alors comme suit :  $k = m - 1 \approx \frac{d^2}{2R^2}$

Afin de réduire la grandeur de cette altération, le module linéaire est multiplié par un facteur  $m_L$  appelé **module de réduction d'échelle**, choisi de manière à obtenir un module linéaire égal à 1 sur deux parallèles  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , **distants de 1 grade de latitude** (soit 100 km environ) **de l'isomètre centrale**  $\varphi_o$  (fig. 2.23-b.). On réalise donc pour chaque parallèle une homothétie par rapport à son centre, ce qui revient à rendre le cône **sécant à l'ellipsoïde**. Le rapport d'homothétie est  $m_L = 1/m(\varphi_1) = 1/m(\varphi_2)$ . Cette homothétie est pratiquement équivalente à une translation du cône de projection « vers le bas » (fig. 2.23-b.). En effet, le nouveau module a pour valeur :

$$m_r = m_L \cdot m(\varphi) = m(\varphi) / m(\varphi_1 \text{ ou } \varphi_2) = \left[ 1 + \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi - \varphi_o)^2 \right] / \left[ 1 + \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi_1 - \varphi_o)^2 \right]$$

Or, les termes  $\frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi - \varphi_o)^2$  et  $\frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi_1 - \varphi_o)^2$  sont très petits devant 1, donc on

peut écrire que  $m_r \approx \left[ 1 + \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi - \varphi_o)^2 \right] \cdot \left[ 1 - \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi_1 - \varphi_o)^2 \right]$ .

Donc  $m_r \approx 1 + \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi - \varphi_o)^2 - \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi_1 - \varphi_o)^2$  soit  $m_r \approx m(\varphi) - \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi_1 - \varphi_o)^2$ .

Le terme  $1 - \frac{\rho_o}{2v_o} \cdot (\varphi_1 - \varphi_o)^2$  vaut environ  $0,999\,877 = 1 - 12,3 \cdot 10^{-5}$  quelle que soit la zone Lambert.

Si les infiniment petits d'ordre supérieurs  $\varepsilon(\varphi)$  ne sont pas négligés, on obtient exactement  $(1 - 12,258 \cdot 10^{-5})$  pour la zone Lambert II,  $(1 - 12,25 \cdot 10^{-5})$  pour la zone Lambert III et  $(1 - 12,266 \cdot 10^{-5})$  pour la zone Lambert I.

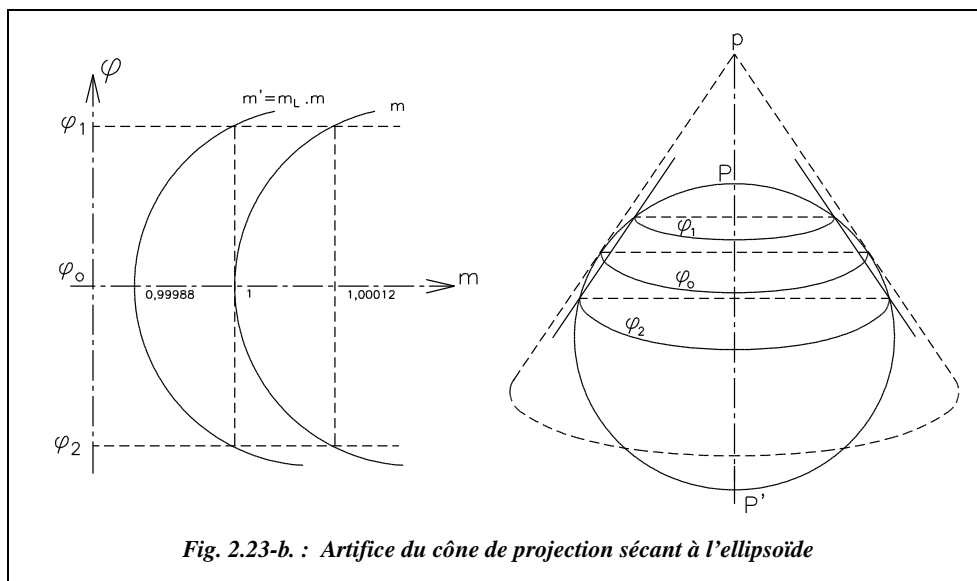
Le coefficient d'altération linéaire (à  $10^{-6}$  près) devient  $kr = (1 + d^2/2R^2) \cdot (1 - 12,3 \cdot 10^{-5}) - 1$  soit  $kr \approx d^2/2R^2 - 12,3 \cdot 10^{-5}$  **quelle que soit la zone Lambert.**

#### Remarque

L'isomètre centrale, sur laquelle le module linéaire est minimum, reste l'image du parallèle  $\varphi_o$  bien que le module linéaire y soit différent de 1 (voir les valeurs de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  au § 3.4.4.2.).

Dans l'homothétie définie précédemment, le rayon de l'image d'un parallèle est :

$$\mathcal{R} = m_L \cdot \mathcal{R}_o \cdot \exp[-(\ell - \ell_o) \sin \varphi_o]$$



### 3.4.2.2 Calcul de l'altération linéaire

Il est possible de calculer le coefficient d'altération linéaire sur un parallèle distant de  $d$  de l'isomètre centrale.

#### Exemple

$$d = 50 \text{ km de } \varphi_0 \quad kr \approx \frac{d^2}{2R^2} - 12,3 \cdot 10^{-5} \approx (3,1 - 12,3) \cdot 10^{-5} = -9,2 \text{ cm/km}$$

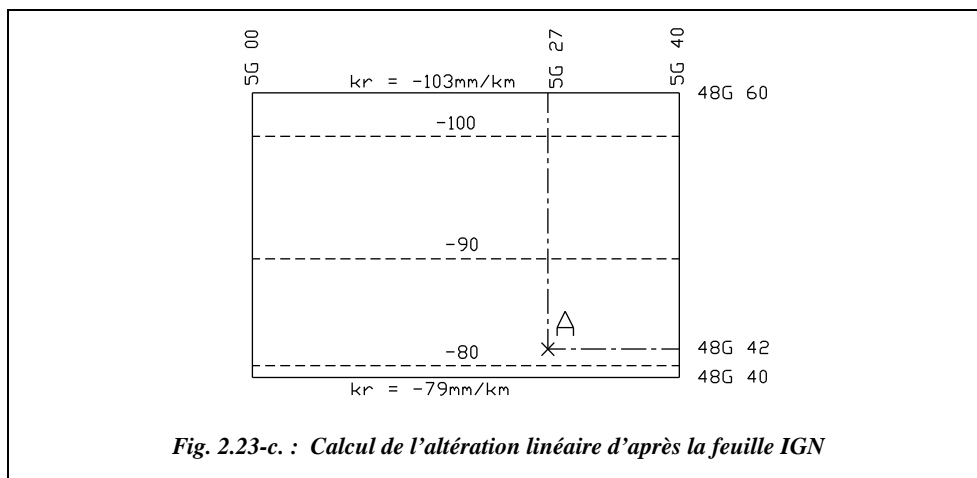
$$d = 150 \text{ km} \quad kr \approx (27,6 - 12,3) \cdot 10^{-5} = +15,3 \text{ cm/km, etc.}$$

Il suffit donc de connaître la latitude d'un point pour en connaître l'altération linéaire.

Soit un point à la latitude  $\varphi = 48,42$  gon. Il se situe à 0,58 gon au sud de l'isomètre centrale 49 gon. Donc  $d \approx 0,58 \times 100 = 58$  km, 1 gon en latitude donnant environ 100 km sur la surface de l'ellipsoïde. En ce point,  $kr = -12,3 + 58^2 / (2 \times 6\,380)^2 = -12,3 + 4,1 = -8,2$  cm/km.

Sur des documents s'appliquant aux feuilles au 1/50 000, l'IGN propose un moyen graphique de calcul de  $kr$  : par exemple, pour la feuille de Grasse,  $kr$  est déterminé sur un graphique équivalent à celui de la figure 2.23-c.

La feuille est limitée par deux méridiens de 0,2 gon de différence de longitude et par deux parallèles de différence de latitude 0,2 gon. Pour un point A de latitude 48,42 gon (exemple précédent), on retrouve une altération  $kr$  égale à  $-82$  mm/km.



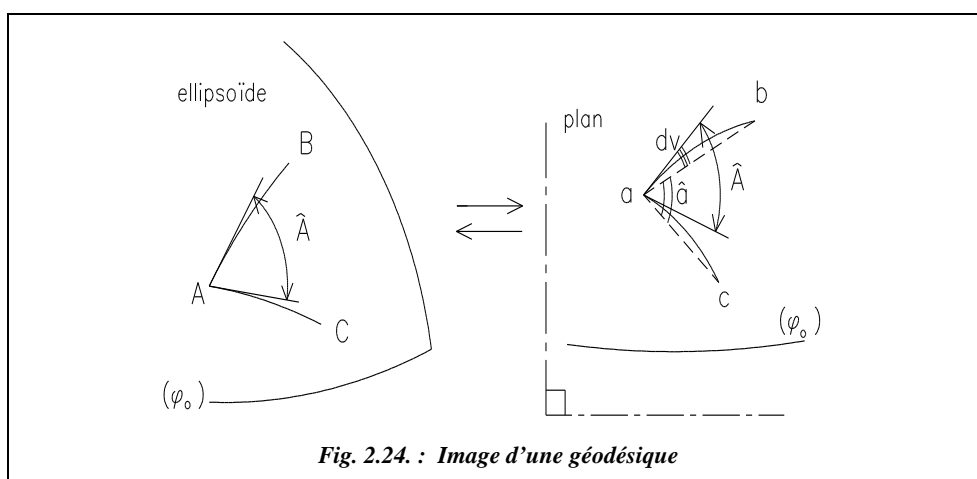
Si le point est donné en coordonnées planes Lambert ( $E, N$ ), il faut calculer ses coordonnées géographiques et, dans ce cas, la latitude suffit puisque l'altération est fonction de la distance à l'isomètre centrale. On peut aussi utiliser des abaques donnant  $kr$  en fonction des coordonnées (chap. 4 § 7.1.6).



Le tableau COORDON.XLS du cédérom de l'ouvrage permet de calculer le coefficient d'altération linéaire  $kr$  pour un point donné en coordonnées géographiques ou Lambert ; le tableau ALTERAT.XLS permet d'obtenir divers abaques donnant le coefficient  $kr$  pour toutes les zones Lambert.

### 3.4.3 L'image d'une géodésique

#### 3.4.3.1 L'image de la géodésique $\widehat{AB}$ de l'ellipsoïde





L'image d'une géodésique  $\widehat{AB}$  est une courbe  $\widehat{ab}$  dont la concavité est toujours tournée vers l'isomètre centrale de latitude  $\varphi_o$ .

Pour effectuer des calculs dans le plan (résoudre des triangles par exemple) à partir des mesures angulaires réalisées sur le terrain, les réductions à faire sur  $\widehat{AB}$  sont (fig. 2.24.) :

- connaissant le module linéaire  $m$ , la réduction de la distance  $\widehat{AB}$  sur l'ellipsoïde à la distance plane de la corde  $\overline{ab}$ , très peu différente de l'arc  $\widehat{ab}$  ;
- la réduction des observations angulaires de l'arc  $\widehat{ab}$  à la corde  $\overline{ab}$ .

Il y a conformité dans la représentation, c'est-à-dire que les angles sont égaux :  $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) = (\widehat{ab}, \widehat{ac})$  (fig. 2.24.).

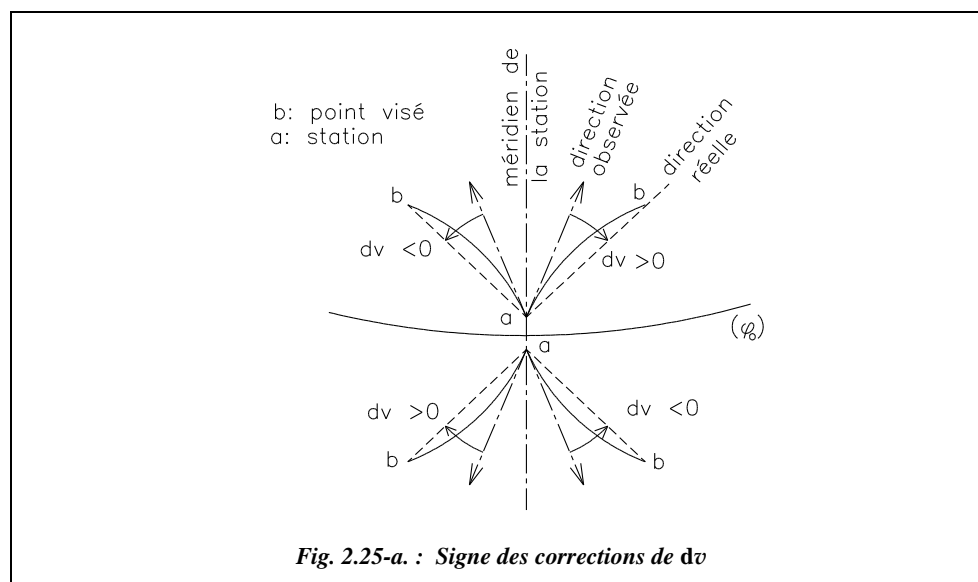
Les calculs sont effectués sur les triangles plans  $abc$  ; les angles du triangle sont ceux définis par les cordes alors que les angles observés sont ceux définis par les arcs. Il faut donc les corriger de la quantité  $dv$  (fig. 2.24.).

### 3.4.3.2 Réduction de l'arc à la corde

On appelle cette réduction la **correction de  $dv$** .

Cette correction s'applique soit aux gisements observés, soit aux directions observées afin d'obtenir les gisements réels à introduire dans les calculs.

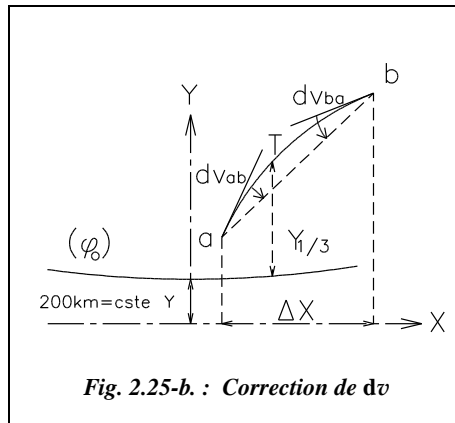
**Cette correction est accompagnée d'un signe** : pour le connaître, il suffit de savoir, comme indiqué au paragraphe 3.4.1.2., que la transformée d'une ligne géodésique tourne sa concavité vers le parallèle origine (isomètre centrale) sur le plan (fig. 2.25-a.).



On démontre que cette correction est égale à :  $dv_{ab} = \frac{1}{2} \Gamma_{1/3} \cdot ab$

$\Gamma_{1/3}$  étant la courbure de  $\widehat{ab}$  au tiers de  $ab$  à compter de  $a$ .

#### Remarque



- La transformée de la géodésique n'étant pas un arc de cercle, on a  $|dv_{ab}| \neq |dv_{ba}|$  ; c'est pourquoi la correction fait intervenir un point  $T$ , situé au tiers de la courbe, qui correspond à la courbure moyenne (fig. 2.25-b.).

- $dv$  est nulle pour une visée perpendiculaire aux isomètres car  $\Gamma$  est nul.

- $\Gamma$  est très faible, par conséquent la réduction de  $dv$  est de l'ordre de quelques dmgon au maximum ; elle est souvent négligeable, en particulier pour des visées de portée inférieure au kilomètre.

Cette réduction est également notée  $r_C$ , qui signifie « réduction à la corde ».

#### 3.4.3.3 Calcul pratique de $dv$

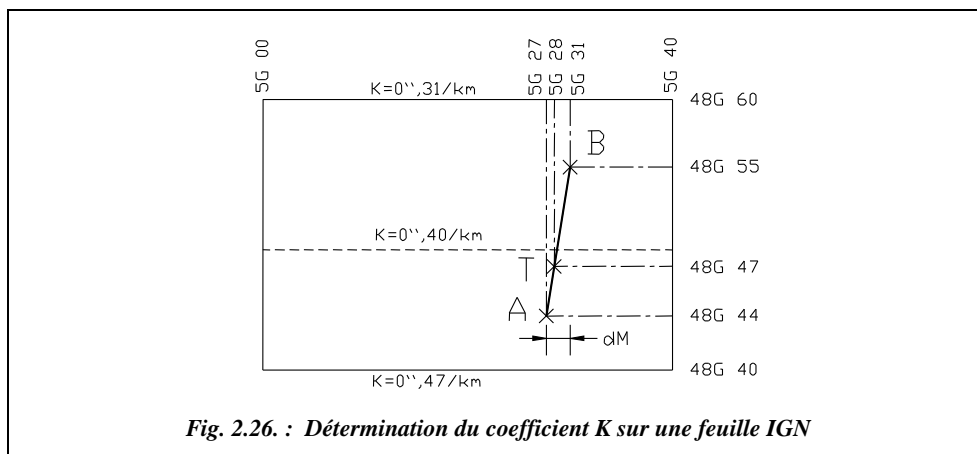
On peut déterminer la valeur de  $dv$  au moyen de trois méthodes.

- Première méthode : sur des documents s'appliquant aux feuilles au 1/50 000, l'IGN propose un moyen graphique de calcul de  $dv$  : par exemple, pour la feuille de Grasse, on détermine  $dv$  égale à  $K \cdot dM$  (fig. 2.26.), où  $dv$  est notée  $c$ ,  $dM$  étant la valeur (en kilomètres à 0,5 km près) en projection de la visée  $ab$  sur la direction des parallèles géographiques et  $K$  un coefficient donné en seconde centésimale par kilomètre, c'est-à-dire en dmgon par km ( $K$  peut aussi être extrapolé sur une carte des altérations au 1/500 000).

Par exemple, on obtient pour la visée AB (fig. 2.26.) :

- station en A (982 165,63 ; 154 744,35)
- visée sur B (985 198,63 ; 165 754,74)

On place ces points sur la carte : leurs coordonnées géographiques sont proches de 5,27 gon Est de Paris et 48,44 gon Nord pour A, et 5,31 gon Est de Paris et 48,55 gon Nord pour B. Au point T, situé au tiers de AB à partir de A, la valeur de  $K$  est 0,41 dmgon/km (fig. 2.26.).



- Pour AB,  $dM = -3$  km, (c'est la différence  $X_A - X_B$ ) on a  $dv = -3 \cdot 0,41 = -1,2$  dmgon alors que la visée a une portée de 11 km.
- Deuxième méthode : à partir de l'expression :  $dv = 0,1 \cdot \mu_{1/3} \cdot \Delta\lambda_{\text{km}}$  dans laquelle  $\mu_{1/3}$  est une expression complexe tabulée par l'IGN en fonction de la latitude et  $\Delta\lambda$  la différence de longitude entre les deux points.
- Troisième méthode : par la formule simplifiée,

$$dv_{ab} = s \cdot \left| \frac{\Delta E}{128} \cdot (N_{1/3 \text{ de } ab} - 200) \right| \text{ dmgon.}$$

$\Delta E$  (km): différence d'abscisse entre les deux points ;

$N_{1/3}$  (km): ordonnée du point situé au tiers de ab ;

$s$  : signe de la correction de  $dv$  fonction de la position de ab par rapport à l'isomètre centrale et au méridien de la station (fig. 2.25-a.).

### Application

Calculez au moyen de la dernière formule de la correction de  $dv$  pour la visée AB donnée précédemment.

### Réponse

$dv = 1 \cdot \left| 3,03 / 128 \cdot (158,4 - 200) \right| = -1$  dmgon (pour une visée de 11 km).

Voir d'autres exemples de calcul, chap. 3 § 4.4.2 et § 6.8.2



Le tableau ALTERAT.XLS du cédérom permet de calculer  $dv$  pour une visée donnée. La fonction  $dv$  (Xstation, Ystation, Xvisée, Yvisé) ajoutée aux fonctions d'Excel par le tableau MENUTOPO.XLS effectue un calcul automatique de  $dv$  (le numéro de zone Lambert doit figurer dans les ordonnées en milliers de kilomètre).

### 3.4.4 Emploi en France de la représentation Lambert

La représentation plane de l'ellipsoïde de Clarke est utilisée en géodésie et cartographie sous forme de zones à champ restreint (§ 3.4.4.2) dans le but de limiter les déformations de réduction à la projection.

#### 3.4.4.1 Méridien origine $\lambda_o$

Le méridien origine ( $\lambda = \lambda_o$ ) est le méridien de Paris situé à l'Observatoire de Paris. Il est à une longitude  $\lambda_o = 2,596\,921\,296$  gon à l'Est du méridien de Greenwich. En France, le méridien de Greenwich passe à proximité des villes de Tarbes, Angoulême, Le Mans et Le Havre et celui de Paris près de Carcassonne, Bourges et Amiens.

#### 3.4.4.2 Isomètres centrales $\varphi_o$

La France métropolitaine est divisée en quatre zones étagées du Nord au Sud dont la latitude des isomètres centrales est :

- 55 gon pour la zone « Nord » dite Lambert I ;
- 52 gon pour la zone « centre » dite Lambert II ;
- 49 gon pour la zone « Sud » dite Lambert III ;
- 46,85 gon pour la Corse dite zone Lambert IV.

Pour réduire l'altération linéaire en limite des zones, on limite ces dernières à  $\varphi_o \pm 1,5$  gon, soit 150 km de part et d'autre de l'isomètre centrale et on multiplie l'ellipsoïde modèle par un module de réduction d'échelle  $m_L$  dont la valeur par zone est donnée dans le tableau ci-contre.

Latitude (gon)	Module $m_L$	$kr \approx m_L - 1$
$\varphi_o + 1,5$	1,00016	+ 16 cm/km
$\varphi_1$	1	0
$\varphi_o$	$1 - 12 \cdot 10^{-5}$	- 12 cm/km
$\varphi_2$	1	0
$\varphi_o - 1,5$	1,00016	+ 16 cm/km

Le coefficient d'altération linéaire devient alors  $kr \approx -12$  cm/km sur l'isomètre centrale  $\varphi_o$  et le coefficient d'altération devient  $kr \approx +16$  cm/km en limite de zone.

Les valeurs exactes du module de réduction linéaire  $m_L = 1 + kr$  par zone sont données au paragraphe 3.4.2.1. Nous les rappelons ci-contre.

Zone	$m_L$
I	$0,999\,877\,34 = 1 - 12,266 \cdot 10^{-5}$
II	$0,999\,877\,42 = 1 - 12,258 \cdot 10^{-5}$
III	$0,999\,877\,50 = 1 - 12,25 \cdot 10^{-5}$
IV	$0,999\,944\,71 = 1 - 5,529 \cdot 10^{-5}$

A la limite de deux zones Lambert, sur une **bande de recouvrement de 20 km** de large, les coordonnées des points sont calculées dans les deux zones. En effet, les coordonnées et la valeur de  $kr$  sont différentes pour le même point exprimé dans deux zones adjacentes du fait de la différence des cônes de projection.

C'est pourquoi une zone appelée **Lambert II étendue** a été créée de manière à obtenir un système de projection valable sur tout le territoire ; elle consiste à étendre le quadrillage Lambert de la zone II (centrale) à toute la France.

Un chiffre précédant directement l'ordonnée précise la zone dans laquelle se situe le point : 1 dans la zone I, 2 dans la zone II et 3 dans la zone III. Par exemple, le point de coordonnées 982 152,25 m et 3 154 989,65 m est un point de la zone Lambert III ; son ordonnée dans cette zone est 154 989,65 m.



Le tableau COORDON.XLS du cédérom de l'ouvrage permet de transformer des coordonnées exprimées en Lambert I, III ou IV en Lambert II étendu (voir aussi l'exemple de calcul au paragraphe 3.4.5.2.).

Pour éviter des coordonnées négatives à l'ouest du méridien de Paris et au sud des isomètres centrales, on décale les coordonnées du point origine de chaque zone ( $E_0$ ,  $N_0$ ) :

- $E_0$  = Constante Est = 600 km à l'ouest ;
- $N_0$  = Constante Nord = 200 km au sud.

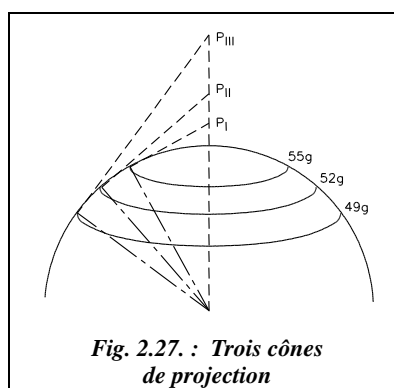
Ces constantes sont différentes pour la zone IV (Corse) ; elles sont données dans le tableau ci-après.

Zone	$\varphi_0$ (gon)	C <sup>ste</sup> Est (km)	C <sup>ste</sup> Nord (km)	$R_0$ (m)	$m_1 \cdot R_0$ (m)	$\varphi_1$ (gon)	$\varphi_2$ (gon)
I	55	600	200	5 458 286,187	5 457 616,674	53,998 358 72	55,995 457 37
II	52	600	200	6 000 431,301	5 999 695,768	50,998 798 84	52,995 571 67
III	49	600	200	6 592 712,692	6 591 905,085	47,999 212 53	49,995 659 79
IV	46,85	234,358	185,861 369	7 053 690,172	7 053 300,173	46,178 208 71	47,519 626 08
II ét.	52	600	2 200	6 000 431,301	5 999 695,768	50,998 798 84	52,995 571 67

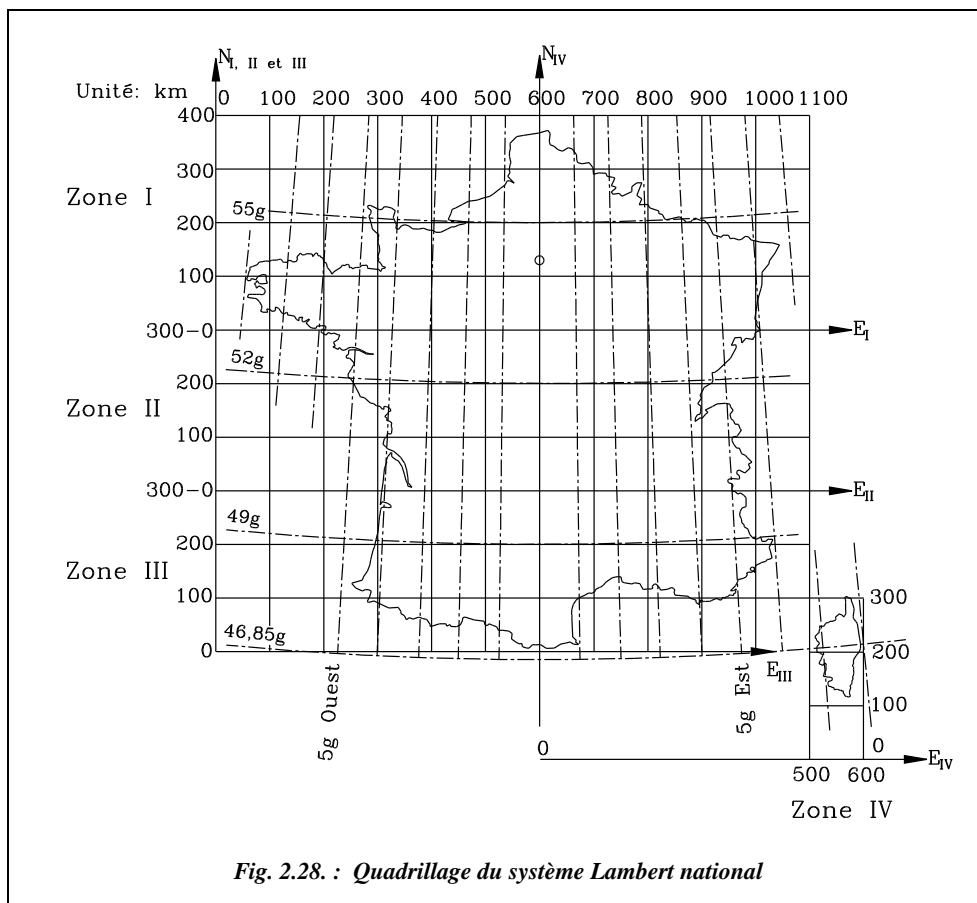
La dernière ligne du tableau (II<sub>ét.</sub>) représente la zone Lambert II étendue à tout le territoire.

La carte (fig. 2.28.) montre le **quadrillage** Lambert par rapport aux méridiens et parallèles. Chaque méridien devrait être constitué en projection de quatre lignes brisées correspondant aux quatre zones Lambert, invisible à cette échelle. En effet, les méridiens sont perpendiculaires aux images des parallèles origines (isomètres centrales) et ces parallèles ne sont pas rigoureusement concentriques (fig. 2.27.).

Reportez-vous au paragraphe 4. pour observer les répercussions sur la carte de base au 1/25 000.



**Fig. 2.27. : Trois cônes de projection**



### 3.4.5 Transformation de coordonnées

Les formules suivantes transforment des coordonnées géographiques en coordonnées Lambert sur l'ellipsoïde Clarke 80. Les résultats des paragraphes 3.4.1. et 3.4.2. sont utilisés pour calculer les coordonnées polaires ( $\mathcal{R}$ ,  $\gamma$ ) en fonction de ( $\lambda$ ,  $\varphi$ ).

#### 3.4.5.1 Transformation des coordonnées géographiques ( $\lambda$ , $\varphi$ ) en coordonnées lambert ( $E$ , $N$ )

- Transformation des coordonnées géographiques ( $\lambda$ ,  $\varphi$ ) en coordonnées polaires ( $\mathcal{R}$ ,  $\gamma$ )

On a :  $\gamma = (\lambda - \lambda_o) \sin \varphi_o$

$\mathcal{R} = m_L \cdot \mathcal{R}_o \cdot \exp[-(\mathcal{E} - \mathcal{E}_o) \sin \varphi_o]$  après avoir calculé  $\mathcal{R}_o$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_o$ .

- Transformation des coordonnées polaires ( $\mathcal{R}$ ,  $\gamma$ ) en coordonnées géographiques ( $E$ ,  $N$ )

On voit sur la figure 2.29-a. que pour un point A du plan de coordonnées polaires  $(\mathcal{R}, \gamma)$ , les coordonnées cartésiennes Lambert sont les suivantes :

$$\begin{aligned} E_A &= E_0 + \mathcal{R} \sin \gamma \\ N_A &= N_0 + m_L \cdot \mathcal{R}_0 - \mathcal{R} \cos \gamma \end{aligned}$$

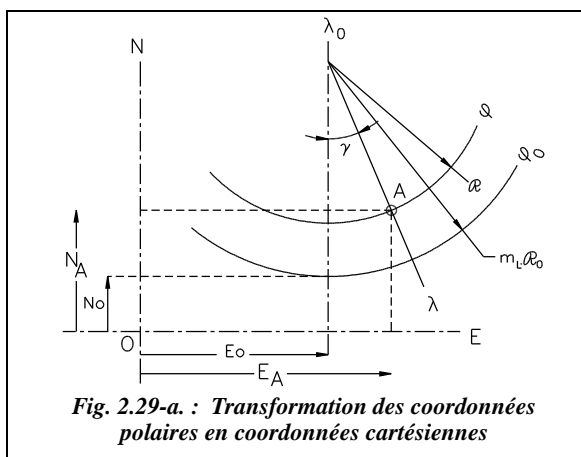


Fig. 2.29-a. : Transformation des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes

### 3.4.5.2

#### Transformation des coordonnées lambert (E, N) en coordonnées géographiques ( $\lambda, \varphi$ )

On a (fig. 2.29-a.) :  $\tan \gamma = \frac{E_A - E_0}{N_0 + m_L \cdot \mathcal{R}_0 - N_A}$  d'où :  $\lambda = \lambda_0 + \frac{\gamma}{\sin \varphi_0}$ .

On calcule  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{E}_0$  et on en déduit  $\mathcal{R} = \frac{m_L \cdot \mathcal{R}_0 - N_A + N_0}{\cos \gamma}$  ;

Ensuite, on calcule  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{1}{\sin \varphi_0} \cdot \ln \left( \frac{m_L \cdot \mathcal{R}_0}{\mathcal{R}} \right)$  exprimé en radian.

- Enfin,  $\varphi$  est calculé par approximations successives à l'aide de :

$$\mathcal{E} = \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \frac{e}{2} \cdot \ln \frac{1 + e \cdot \sin \varphi}{1 - (e \cdot \sin \varphi)}$$

#### Application

Exprimez en Lambert II étendu le point suivant donné en Lambert III :

( $E_{III} = 982\,058,965$  m ;  $N_{III} = 3\,155\,944,160$  m), situé au LTGC d'Antibes.

#### Réponse

1) Transformation en coordonnées géographiques sur l'ellipsoïde Clarke 80 :

$$\mathcal{E}_0 = 0,854\,591\,098 \text{ rad} \quad \mathcal{E} = 0,842\,641\,708 \text{ rad} \quad \mathcal{R} = 6\,646\,950,161 \text{ m}$$

$$\gamma = 3,661\,234\,312 \text{ gon} \quad \lambda = 7,857\,974\,592 \text{ gon} \quad \varphi = 48,449\,472\,529 \text{ gon}$$

$$kr = -8,5 \text{ cm/km}$$

2) Transformation en Lambert II :

$$\mathcal{R} = 6\,354\,961,193 \text{ m} \quad \gamma = 3,835\,142\,8 \text{ gon.}$$

$$(E_{II} = 982\,605,846 \text{ m} ; N_{II} = 1\,856\,262,586 \text{ m})$$

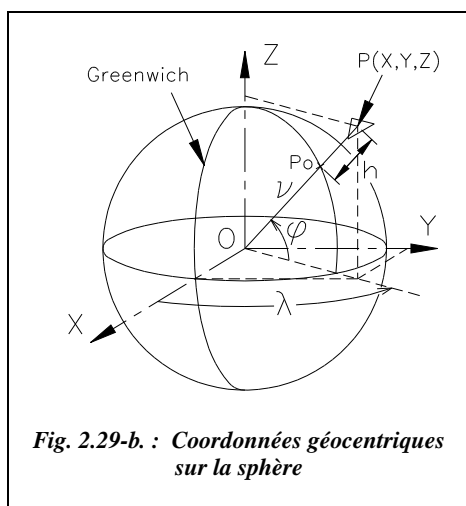
$$kr = 140 \text{ cm/km.}$$

### Remarque

On remarque, à partir de l'exemple précédent, que la valeur du coefficient d'altération linéaire  $kr$  serait très importante s'il n'existait en France qu'une seule zone (1,40 m au km à Antibes en Lambert II étendu) et qu'en raison du fait des différents cônes de projection, les projections des méridiens ne sont pas parallèles (environ 0,17 gon d'écart sur la convergence des méridiens à Antibes).

Pour trouver la correspondance entre l'ordonnée 1 856 km en Lambert II étendu et 3 156 km en Lambert III, on doit considérer une translation de repère de 1 300 km en ordonnée (1 000 km pour le changement de zone et 300 km entre les deux axes des abscisses).

## 3.4.6 Changement d'ellipsoïde



Si les coordonnées géodésiques de départ sont exprimées sur un ellipsoïde autre que Clarke 80 (par exemple IAGRS 80 pour les données brutes GPS, chap. 7 § 1.), il faut les convertir en coordonnées géodésiques sur Clarke 80 avant d'effectuer les calculs détaillés au paragraphe 3.4.5. précédent. Pour cela, on doit d'abord exprimer ces coordonnées dans un repère géocentrique (fig. 2.29-b.) défini au paragraphe 2.2.3.1

Le point O est alors le centre de l'ellipsoïde utilisé. Les coordonnées d'un point sont  $(\lambda, \varphi, h)$ ,  $h$  étant la hauteur exprimée en mètres du point au-dessus de l'ellipsoïde.

Pour la suite, reportez-vous à la figure 2.29-c.

### 3.4.6.1

#### Transformation des Coordonnées géodésiques en coordonnées géocentriques sur l'ellipsoïde 1

Pour transformer des coordonnées géodésiques  $(\lambda_1, \varphi_1, h_1)$  en coordonnées géocentriques  $(X_1, Y_1, Z_1)$ , on applique les formules suivantes :

$e$  et  $v$  sont respectivement définis aux paragraphes 2.2.1. et 2.3.1.2.

$$\begin{aligned} X_1 &= (v_1 + h_1) \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1 \\ Y_1 &= (v_1 + h_1) \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \lambda_1 \\ Z_1 &= (v_1 \cdot (1 - e_1^2) + h_1) \cdot \sin \varphi_1 \end{aligned}$$



### 3.4.6.2 Changement d'ellipsoïde : ellipsoïde 1 vers ellipsoïde 2

Pour changer d'ellipsoïde, il suffit de faire intervenir les décalages d'origine ( $tx$ ,  $ty$  et  $tz$ ) entre les deux ellipsoïdes ainsi qu'un éventuel angle  $\theta$  entre les axes des X dans les deux repères (décalage de l'origine des longitudes, fig. 2.29-c.).

Ce changement de repère peut aussi être effectué par **transformation à trois ou sept paramètres**. Dans ce dernier cas, on introduit trois translations, trois rotations et une homothétie ou mise à l'échelle. Ces paramètres sont calculés pour une zone donnée à partir de plusieurs points déterminés sur les deux ellipsoïdes (voir tome 2 chap. 1 § 10.3).

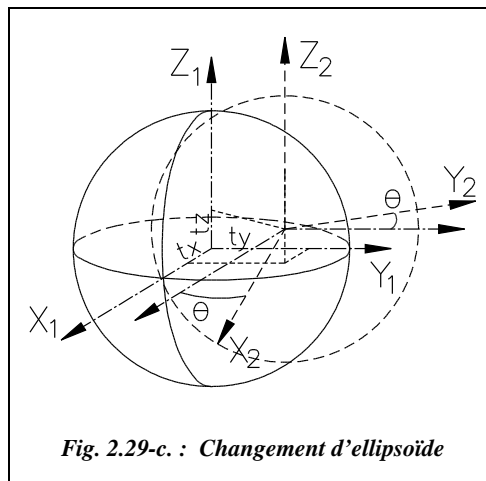


Fig. 2.29-c. : Changement d'ellipsoïde

Par exemple, pour passer de l'ellipsoïde IAGRS 80 (système WGS 84) à l'ellipsoïde Clarke 80, on effectue un décalage d'origine de ( $tx = 168$  m,  $ty = 60$  m,  $tz = -320$  m), mais pas de rotation autour de Z ( $\theta = 0$ ) puisque les origines des longitudes (Greenwich) sont identiques. Donc :

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 \cdot \cos \theta + Y_1 \cdot \sin \theta + tx \\ Y_2 &= -X_1 \cdot \sin \theta + Y_1 \cdot \cos \theta + ty \\ Z_2 &= Z_1 + tz \end{aligned}$$

#### Remarque

Ces décalages d'origine sont à ajouter aux coordonnées dans le premier système. Ils représentent donc les coordonnées de l'ancienne origine dans le nouveau repère ou encore les opposées des composantes du vecteur de translation.

### 3.4.6.3 Transformation des Coordonnées géocentriques en coordonnées géodésiques sur l'ellipsoïde 2

On effectue le calcul inverse du calcul présenté au paragraphe 3.4.6.1. ;  $\lambda_2$ ,  $\varphi_2$  et  $h_2$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \tan \lambda_2 &= \frac{Y_2}{X_2} \\ R_e \tan \varphi_2 &= Z_2 + v_2 \cdot e_2^2 \cdot \sin \varphi_2 \\ h_2 &= \frac{R_e}{\cos \varphi_2} - v_2 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad R_e = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = (v_2 + h_2) \cos \varphi_2$$

La latitude  $\varphi_2$  s'obtient par approximations successives ( $v_2$  est aussi fonction de  $\varphi_2$ ).

#### Application

Déterminez les coordonnées Lambert du point A de coordonnées géodésiques sur l'ellipsoïde IAGRS 80 : ( $\lambda = 7^\circ 4' 23,472 12''$ ;  $\varphi = 43^\circ 36' 17,141 70''$ ;  $h = 157,450$  m).

#### Réponse

$X_1 = 4\,590\,781,336$  ;  $Y_1 = 569\,630,443$  ;  $Z_1 = 4\,376\,505,933$

$X_2 = 4\,590\,949,336$  ;  $Y_2 = 569\,690,443$  ;  $Z_2 = 4\,376\,185,933$

$\lambda_2 = 7,073\,667\,94^\circ$  ( $7^\circ 4' 25,20459''$ ) ;  $\varphi_2 = 43,604\,736\,78^\circ$  ( $43^\circ 36' 17,05240''$ )

$h_2 = 116,582$  m.

Finalement :  $E = 982\,177,774$  m ;  $N = 3\,155\,974,537$  m ;  $H = 108,08$  m.

L'altitude par rapport au géoïde vaut  $H = h - \Delta$  ;  $\Delta$  est la distance entre l'ellipsoïde et le géoïde ; elle vaut environ 8,5 m à Antibes (voir § 6.1). L'altitude  $H$  n'est ici qu'indicative.



Ces calculs peuvent être effectués automatiquement à partir du tableau COORDON.XLS du cédérom de l'ouvrage.

#### Remarque

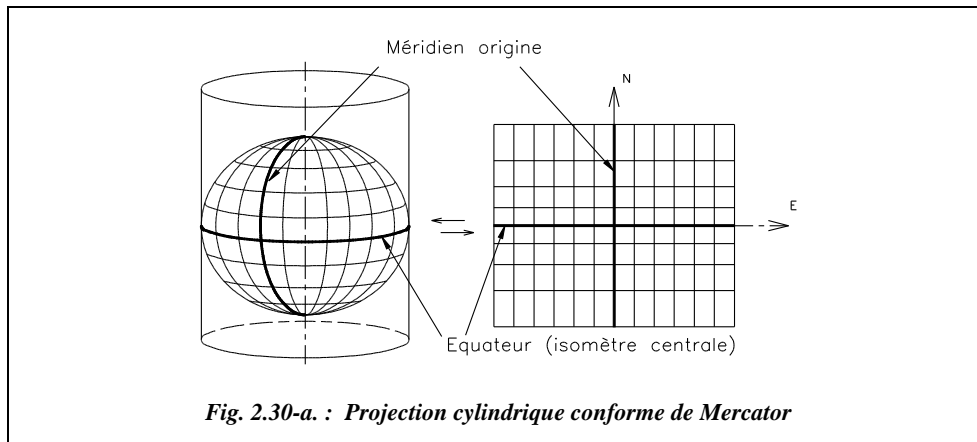
Le calcul effectué à l'aide d'un tableur permet facilement de voir que la précision de huit à neuf chiffres après la virgule sur les angles (en décimal) est nécessaire pour obtenir le millimètre sur les coordonnées. Un ordre de grandeur intéressant à mémoriser est que sur la terre, un angle au centre de  $1''$  correspond environ à 30 m à la surface de la terre ( $10^{-4}''$  correspondent donc environ à 3 mm) et que  $1'$  correspond environ à 1,8 km.

## 3.5 Représentation cylindrique transverse conforme de l'ellipsoïde « universal transverse mercator » utm

### 3.5.1 Représentation cylindrique conforme

En représentation de Mercator, la terre est considérée sphérique. La projection s'effectue sur un cylindre d'axe passant par les pôles et tangent à l'équateur (fig. 2.30-a.).

En projection, l'équateur est représenté par une droite non déformée (avant homothétie) : c'est l'isomètre centrale. Les méridiens sont des droites parallèles, **équidistantes** et perpendiculaires à l'équateur. Les parallèles sont des droites perpendiculaires aux méridiens et **leur écartement est calculé en fonction de la latitude de sorte que la représentation soit conforme**.



### 3.5.1.1 Coordonnées en projection d'un point $M(\lambda, \varphi)$

- Pour une sphère de rayon  $R$ , nous avons :  $E = R \cdot \lambda$  et  $N = R \cdot \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$

Pour un ellipsoïde de demi grand axe  $a$ , de demi petit axe  $b$  et d'excentricité  $e$  :

$$E = a \cdot \lambda ; N = a \cdot \left[ \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \frac{e}{2} \cdot \ln \left[ \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right] \right]$$

Dans ces formules, la latitude  $\lambda$  et la longitude  $\varphi$  sont exprimées en radian.

### 3.5.1.2 Altération linéaire

- Le module linéaire  $m = \frac{1}{\cos \varphi}$  vaut 1 à l'équateur et est infini aux pôles.

Ceci montre que ce type de représentation est plus adapté aux régions équatoriales. On se limitera généralement à des latitudes de  $3^\circ$  de part et d'autre de l'équateur.

Pour des valeurs faibles de la latitude  $\varphi$  :  $m \approx 1 + \frac{\varphi^2}{2} \approx 1 + \frac{N^2}{2R^2}$  en un point de

coordonnées  $(E, N)$ . Le coefficient d'altération linéaire vaut donc :  $kr \approx \frac{N^2}{2R^2}$ .

$kr$  est donc une fonction parabolique de  $N$  près de l'équateur.

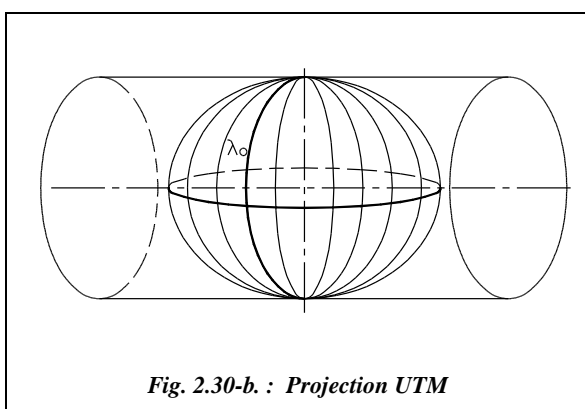
Après homothétie de module  $m_L = 0,999\ 33$ , on obtient les valeurs extrêmes suivantes de l'altération linéaire :

- $kr = -67$  cm/km sur l'équateur ;
- $kr = 0$  cm/km pour  $\varphi \approx +2^\circ$  (ou  $\varphi \approx -2^\circ$ ) ;
- $kr = +71$  cm/km pour  $\varphi = +3^\circ$  (ou  $\varphi = -3^\circ$ ).

### 3.5.1.3 *Avantage de cette représentation*

Étant des droites parallèles, les méridiens sont coupés sous un angle constant par une droite (voir la définition de la loxodromie au paragraphe 2.3.2.1.). Ceci permet en navigation de fixer facilement le cap. Mais la route la plus courte (ou orthodromie) étant une géodésique projetée suivant une courbe sur le plan, on adopte un compromis entre l'orthodromie (cap modifié en permanence mais chemin le plus court) et la loxodromie (cap constant mais chemin plus long). Ainsi les cartes marines sont une projection UTM.

## 3.5.2 Représentation cylindrique transverse



Cette représentation consiste à circonscrire l'ellipsoïde dans un cylindre le long d'un méridien ; le cylindre est dans ce cas d'axe perpendiculaire à la ligne des pôles (fig. 2.30-b.). On représente un seul fuseau (fig. 2.31.). Les autres fuseaux sont identiques. **Les calculs dans un seul fuseau sont donc suffisants**, ce qui est le principal avantage de cette représentation, la plus utilisée dans le monde.

Le système international ED 50 (*European Datum 1950*) utilise la projection plane UTM associée à l'ellipsoïde *Hayford 1909*. Son point géodésique fondamental est à Potsdam.

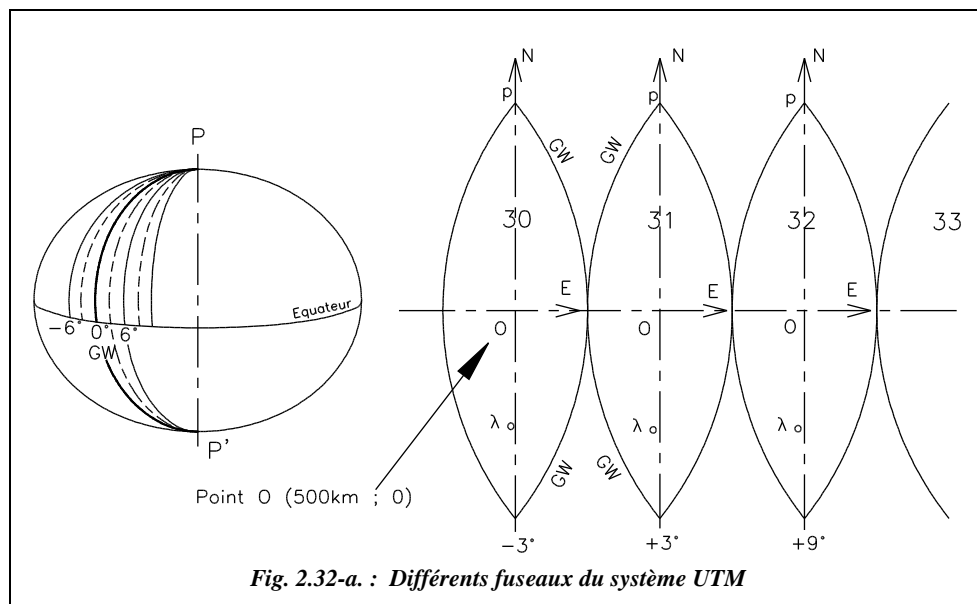
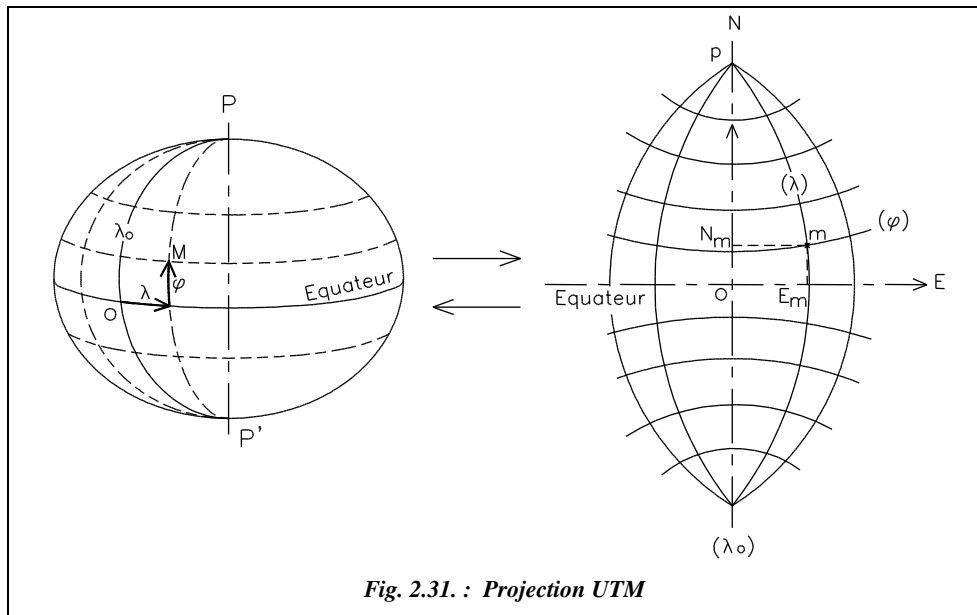
- le méridien origine de longitude  $\lambda_o$  a pour image une droite (axe des ordonnées  $Y$ ) sur laquelle les longueurs sont conservées avant homothétie (à un facteur 0,9996 près) ;
- l'équateur a pour image une droite perpendiculaire au méridien origine de longitude  $\lambda_o$  qui est l'axe  $E$  (axe des abscisses  $X$ , fig. 2.31.) ;
- le point  $M$  de coordonnées géographiques  $(\lambda, \varphi)$  a pour image le point  $m$  de coordonnées rectangulaires  $(E, N)$  ;
- les méridiens ont pour image des courbes concaves vers l'isomètre  $\lambda_o$  ;
- les parallèles ont pour image des courbes convexes vers l'équateur.

Ce système divise la terre en 60 fuseaux de  $6^\circ$  d'amplitude en longitude (fig. 2.32-a.) de manière à limiter l'altération linéaire en limite de fuseau. La numérotation commence au méridien  $180^\circ$  ; elle est croissante d'Ouest vers l'Est. Le méridien de Greenwich sépare les fuseaux 30 et 31. L'ensemble des fuseaux est identique.

Dans chaque fuseau :

- sur l'isomètre  $\lambda_o$ , le module linéaire est pris égal à 0,9996 ;
- l'isomètre centrale est l'image du méridien origine  $\lambda_o$  ;

- pour éviter les abscisses négatives, le point O de coordonnées géographiques  $\lambda = \lambda_0$  et  $\varphi = 0$ , origine des axes  $E$  et  $N$  ( $X$  et  $Y$ ), a pour coordonnées :  
 $E_0 = 500\,000\text{ m}$  (500 km),  
 $N_0 = 0$  dans l'hémisphère Nord, 10 000 000 m (10 000 km) dans l'hémisphère Sud.



Dans un tel repère, les abscisses de points d'un même méridien ne sont pas égales.

### 3.5.2.1 Coordonnées rectangulaires

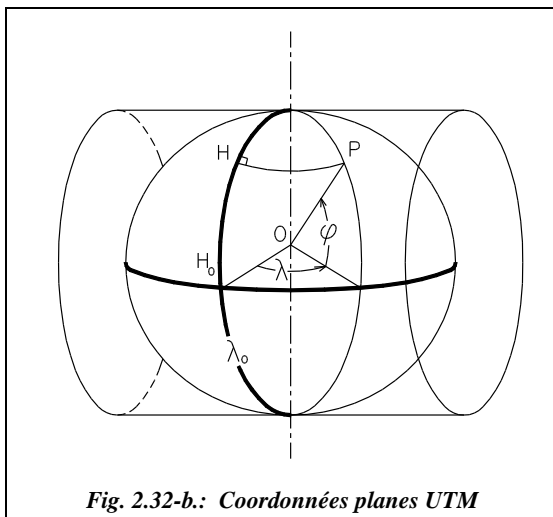


Fig. 2.32-b.: Coordonnées planes UTM

Par principe, elles sont pratiquement identiques à celles de la représentation cylindrique non transverse. Pour un point P, il faut dans les formules du paragraphe 3.5.1. :

- inverser le rôle de  $E$  et  $N$  ;
- remplacer la latitude par l'angle au centre interceptant l'arc HP (fig. 2.32-b.) ; cet angle varie de la valeur  $\lambda$  si P est sur l'équateur à 0 si P est au pôle ;
- remplacer la longitude par l'angle interceptant l'arc  $H_0P$ .



Excel 7

Ces calculs font appel à la théorie des nombres complexes. Le calcul complet est détaillé dans le tableau COORDON.XLS du cédérom de l'ouvrage.

#### Applications avec utilisation du tableau de calcul

- Déterminez les coordonnées UTM du point suivant donné en coordonnées géographiques sur l'ellipsoïde Hayford 09 : M ( $\lambda = 6^\circ 50' 16''$  ;  $\varphi = 43^\circ 33' 40''$ )
- Déterminez les coordonnées UTM du point suivant donné en coordonnées géographiques sur l'ellipsoïde Clarke 80 : M ( $\lambda = -5^\circ 30' 0''$  ;  $\varphi = 34^\circ 45' 0''$ )

#### Réponses

- M (325 362,802 m ; 4 825 487,350 m), fuseau 32.
- M (271 145,459 m ; 3 847 883,647 m), fuseau 30.

### 3.5.2.2 Altération linéaire

En un point de longitude  $\lambda$  comptée à partir du méridien origine du fuseau, le module linéaire vaut  $m = \frac{1}{\cos \lambda}$ . En un point de coordonnées  $(E, N)$  proche du méridien origine (3° de part et d'autre), le coefficient d'altération linéaire vaut donc  $kr \approx \frac{E^2}{2R^2}$ .

Après homothétie de facteur  $0,999\ 6 \approx 1 - 40 \cdot 10^{-5}$ , l'altération linéaire vaut :

- 40 cm/km sur l'isomètre centrale ;
- 0 cm/km à 180 km de l'isomètre centrale ( $E = 320$  km ou  $E = 680$  km) ;

- + 98 cm/km à  $\pm 3^\circ$  de l'isomètre centrale (sur l'équateur), soit  $E = 167$  km ou  $E = 833$  km.

### 3.5.2.3 Réduction à la corde ou correction de $dv$

La courbe  $ab$  a sa concavité dirigée vers le méridien origine ; le signe de la correction est donc étudié de la même manière qu'au paragraphe 3.4.3.2. La correction de  $dv$  vaut (fig. 2.32-c.) :

$$dv_{\text{dmgon}} = \frac{E_{1/3\text{km}}}{128} \cdot dN_{\text{km}}$$

Par exemple, près de l'équateur, en limite de fuseau ( $E = 333$  km,  $N = 500$  km), pour une visée vers le nord de 5 km de portée, on obtient :  $dv = 13$  dmgon (en valeur absolue).

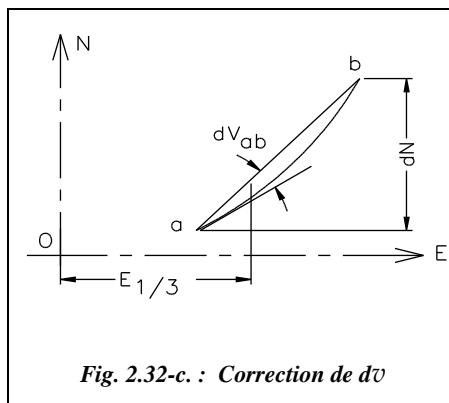


Fig. 2.32-c. : Correction de  $dv$

### 3.5.2.4 Convergence des méridiens

La convergence  $\gamma$  d'un méridien en un point donné  $M$  varie tout le long du méridien de la valeur 0 à l'équateur jusqu'à une valeur infinie au pôle.

Pour la calculer, il suffit de raisonner dans le triangle sphérique  $PMH$  (fig. 2.32-d.) :  
 $\cos(\pi/2 - \varphi) = \cot \lambda \cdot \cot(\pi/2 - \gamma)$  ;  $\sin \varphi = \cot \lambda \cdot \tan \gamma$ .

Donc :  $\tan \gamma = \tan \lambda \sin \varphi$

La longitude  $\lambda$  est comptée à partir du méridien origine de chaque fuseau.

Par exemple, un point  $M$  situé à une longitude  $\lambda = 7,07^\circ$  par rapport à Greenwich et à une latitude  $\varphi = 43,60^\circ$  est dans le fuseau 32. La longitude par rapport au méridien origine de ce fuseau est donc de  $1,93^\circ$  Ouest ( $9^\circ - 7,07^\circ$ ), donc  $\gamma \approx 1,33^\circ$ .

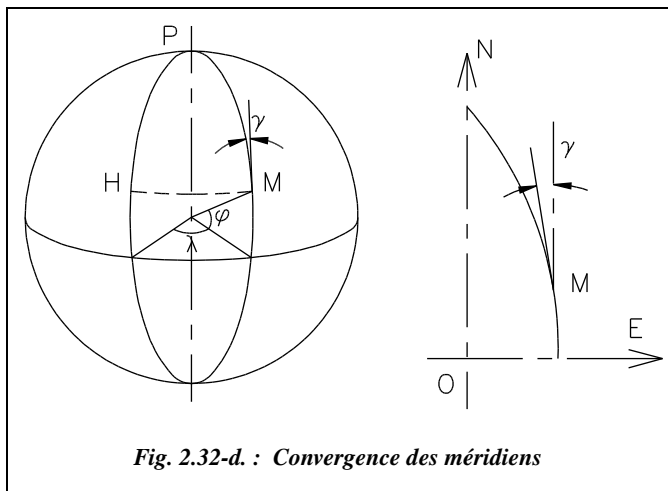


Fig. 2.32-d. : Convergence des méridiens

### Application

Le point de coordonnées géographiques  $\lambda = 6^\circ 50'$  à l'est de Greenwich et  $\varphi = 43^\circ 33'$  nord est situé à environ 325 km en abscisse UTM (voir carte fig. 2.36.). Comment retrouver l'ordre de grandeur de cette valeur ?

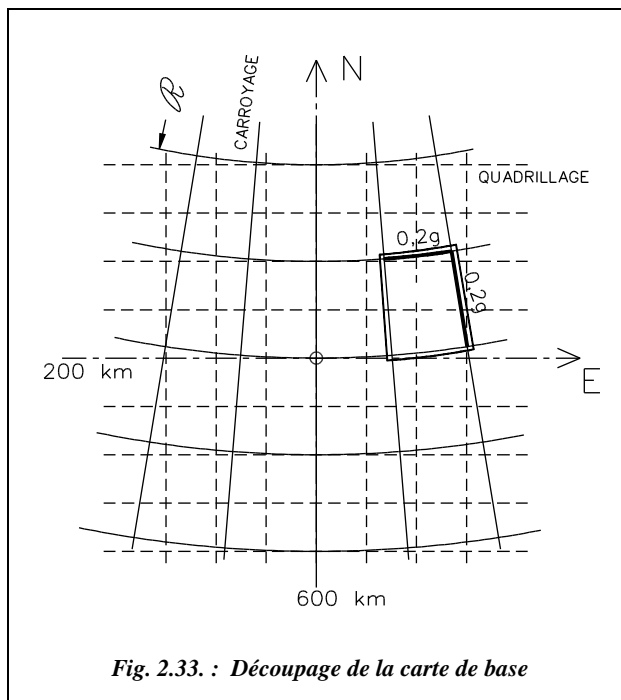
### Réponse

La longitude supérieure à  $6^\circ$  est de Greenwich montre que nous sommes dans le fuseau n° 32, c'est-à-dire à  $9^\circ - 6^\circ 50'$  soit  $2^\circ 30'$  à l'ouest de l'origine du fuseau 32 d'abscisse 500 km. En notant que le rayon d'un parallèle est à peu près égal à  $R_{\text{moyen}} \cdot \cos \varphi$ , on obtient :

$(9^\circ - 6^\circ 50')(\pi / 180) 6380 \cos(43^\circ 33') \approx 175$  km. L'abscisse sera d'environ  $500 - 175 \approx 325$  km.

## 4 LECTURE DE CARTES

### 4.1 Carte de base



On a établi au paragraphe 2. que le système de représentation Lambert est une projection de la France au voisinage d'une isomètre centrale sur un cône tangent à cette isomètre. Les méridiens sont donc des droites convergentes vers l'image p du pôle P et les parallèles des arcs de cercles concentriques de rayon  $\mathcal{R}$ .

Les feuilles de la carte de France au 1/25 000 sont découpées le long de méridiens et parallèles (ceci explique qu'une carte IGN se lit toujours face au nord géographique) ; les côtés Est et Ouest de la carte sont donc convergents et les côtés Nord et Sud sont des

arcs de cercles (fig. 2.33.). Si la convergence et la courbure sont difficilement décelables, on constate qu'une carte du Nord est plus étroite qu'une carte du Sud de la France.



### Application

- Calculez la différence de largeur de deux cartes situées aux 49 et 55 gon de latitude sachant qu'une carte au 1/25 000 a une différence de longitude de 0,2 gon.
- Calculez et vérifiez graphiquement la convergence des méridiens en un point d'une carte.

### Réponse

- $1,374 \text{ km} = [0,2 \cdot \sin 55 \cdot m_L \cdot R_{o55} - 0,2 \sin 49 \cdot m_L \cdot R_{o49}] \pi / 200$ . Les valeurs de  $m_L \cdot R_o$  données au paragraphe 3.4.4.2. On peut retrouver un ordre de grandeur en considérant que le rayon approché d'un parallèle de latitude  $\varphi$  est égal à  $R_{\text{moy}} \cdot \cos \varphi$  avec  $R_{\text{moy}} \approx 6\,380 \text{ km}$  ; on obtient ici  $0,2 (\pi/200) \cdot 6\,380 \cdot (\cos 49 - \cos 55) = 1,377 \text{ km}$ .
- Par exemple, à Antibes,  $\gamma \approx 3,66 \text{ gon}$ .

## 4.2 Définition du nord

Sur une carte IGN, on remarque en légende le croquis ci-contre (fig. 2.34.). Il est mentionné : « La déclinaison magnétique correspond au centre de la feuille, au 1<sup>er</sup> Janvier 1993. Elle diminue chaque année de 0,16 gon ( $0^\circ 08'$ ) ».

Le nord géographique et le nord magnétique sont distincts.

**Le nord géographique** est la direction du méridien du point (ici le centre de la carte) vers le pôle Nord.

**Le nord magnétique** est la direction de l'aiguille aimantée, c'est-à-dire du champ magnétique terrestre du moment et du lieu. Le champ magnétique terrestre, plus intense aux pôles que dans les régions équatoriales, est tel que ses lignes de champ ne suivent pas la direction des méridiens mais l'axe des pôles géomagnétiques est incliné de  $11^\circ 30'$  sur l'axe terrestre. Il est en outre sujet à de lentes variations d'orientation.

L'angle entre le nord géographique et le nord magnétique est la **déclinaison magnétique**  $d$  : elle varie dans le temps et dans l'espace (actuellement elle diminue d'environ 0,16 gon par an). Actuellement, la déclinaison est occidentale.

Le « Nord » du quadrillage du système de projection est la direction des ordonnées  $Y$  positifs en ce point (fig. 2.35.) ; il est encore appelé Nord Lambert.

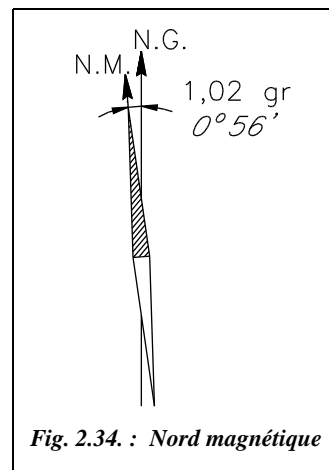
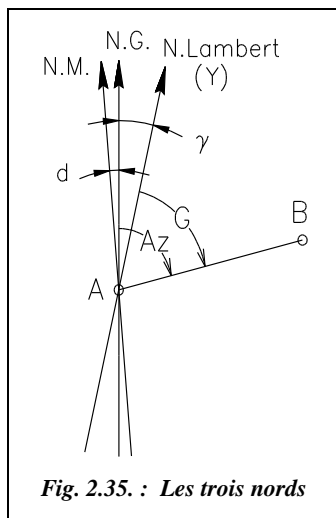


Fig. 2.34. : Nord magnétique



Dans le système de projection Lambert, l'angle entre le Nord géographique et la direction des ordonnées  $Y$  positifs en un point est la **convergence des méridiens**  $\gamma$  (§ 3.4.1.4).

On appelle **Azimuth**  $Az$  l'angle compté positivement en sens horaire depuis le nord géographique, **Gisement**  $G$  l'angle compté positivement en sens horaire depuis le nord Lambert.

#### Application

Implantez le nord magnétique en un point du lycée du génie civil d'Antibes.

#### Réponse

Cela revient à calculer l'angle  $(\gamma + d)$  que l'on doit ouvrir depuis le nord Lambert (accessible sur le terrain à partir de la connaissance de deux points du réseau IGN).

1) Convergence des méridiens : elle est soit mesurée graphiquement sur une carte (angle entre les limites de la carte et le quadrillage Lambert), soit calculée comme au paragraphe 3.4.5.2.  $\gamma \approx 3,66$  gon à Antibes.

2) Déclinaison magnétique : de l'ordre de 1,02 gon au 1<sup>er</sup> janvier 1993, elle diminue de 0,16 gon par an et vaudrait donc environ 0,22 gon au 1<sup>er</sup> janvier 1998 (déclinaison occidentale).

L'angle à ouvrir depuis le nord Lambert pour obtenir le nord magnétique est donc de l'ordre de 3,88 gon vers l'Ouest à Antibes.

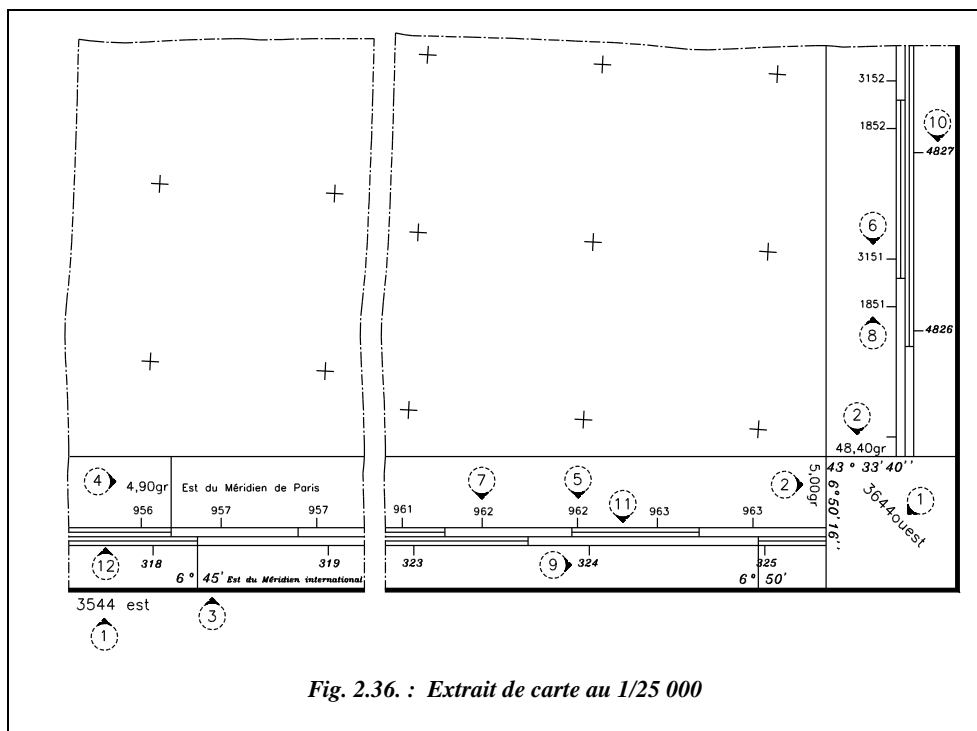
## 4.3 Renseignements portés en marge de la carte

Les numéros des repères définis ci-après correspondent à ceux de la figure 2.36.

a) **Repère 1** : numérotation des feuilles adjacentes.

b) **Repère 2** : en général, le découpage d'une feuille au 1/25 000 se fait suivant les méridiens et les parallèles de 0,20 gon en 0,20 gon, représentant une superficie de l'ordre de  $20 \times 13$  à 15 km. Le méridien origine est le méridien de Paris.

La longitude et la latitude des méridiens et parallèles limitant la carte sont aussi données en degrés sur l'ellipsoïde Hayford 09 ; les longitudes sont exprimées par rapport au méridien international de Greenwich.



c) **Repère 3** : l'échelle extérieure permet de déterminer les coordonnées géographiques en degrés dans le système européen (ellipsoïde de Hayford), le méridien 0° étant le méridien de Greenwich. Elles sont indiquées toutes les cinq minutes sexagésimales.

L'échelle extérieure (12) est graduée toutes les minutes sexagésimales.

d) **Repère 4** : l'échelle intérieure sert à déterminer les coordonnées géographiques en gons rapportées au système géodésique français, le méridien origine étant le méridien de Paris. Elles sont indiquées tous les 0,10 gon.

L'échelle intérieure (11) est graduée tous les 0,01 gon.

e) **Repères 5 et 6** : à l'intérieur du cadre sont portées les amorces du quadrillage kilométrique de la représentation conique conforme Lambert.

Un chiffre précédant l'ordonnée précise la zone dans laquelle se situe la carte : 3 151 indique que le point est situé en zone Lambert III, l'ordonnée à lire étant 151 km.

### Application

a) Comment retrouver l'ordre de grandeur des coordonnées indiquées connaissant les coordonnées géographiques ?

Remarquez que, contrairement à ce que l'on trouve dans beaucoup de logiciels de topographie, le carroyage est constitué par les intersections des méridiens et des parallèles alors que le quadrillage est l'intersection de parallèles aux axes X et Y des coordonnées Lambert.

b) Comment retrouver  $X = 963$  km environ pour  $\lambda = 5$  gon Est ?

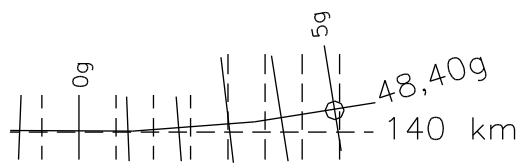


Fig. 2.37. : Évolution du carroyage et du quadrillage Lambert

### Réponse

a) L'angle Sud-Est a pour coordonnées géographiques  $\varphi = 48,40$  gon et  $\lambda = 5$  gon. Sur le méridien origine de Paris, le parallèle 48,40 gon est à 0,60 gon (donc à 60 km) au sud du parallèle origine de la zone III qui est 49 gon : son ordonnée est donc  $200 - 60 = 140$  km ; étant ici situé 5 gon à l'est du méridien de Paris, l'ordonnée du parallèle 48,40 gon sera donc légèrement supérieure à 140 km (fig. 2.37.) :  $\mathcal{R}_{48,4} = 6\,652,71$  km ; la différence d'ordonnée entre la droite  $Y = 140$  km et la droite passant par le point  $\varphi = 48,4$  gon et  $\lambda = 5$  gon Est vaut :  $\mathcal{R}_{48,4}(1 - \cos \gamma) = 9,9$  km avec  $\gamma = 5 \cdot \sin 49 = 3,479$  6 gon. On obtiendrait donc une ordonnée de 149,9 km.

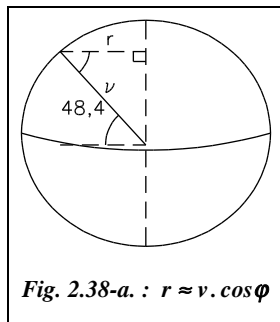


Fig. 2.38-a. :  $r \approx v \cdot \cos \varphi$

b) À cette latitude,  $v = 6\,388,58$  km et  $r = 4\,629,50$  km, donc 5 gon de longitude équivaut à 363,6 km (fig. 2.38-a) ; sachant que l'abscisse de l'origine est 600 km, nous obtenons ici 963,6 km qui est l'ordre de grandeur cherchée.

Remarquez que, dans les zones proches du méridien origine de Paris, les méridiens et les parallèles sont pratiquement confondus avec le quadrillage.

f) **Repères 7 et 8** : afin d'avoir un système unique de repérage pour la France, la chiffraison de la zone II étendue est éditée en bleu. Le premier chiffre, ici 1, ne

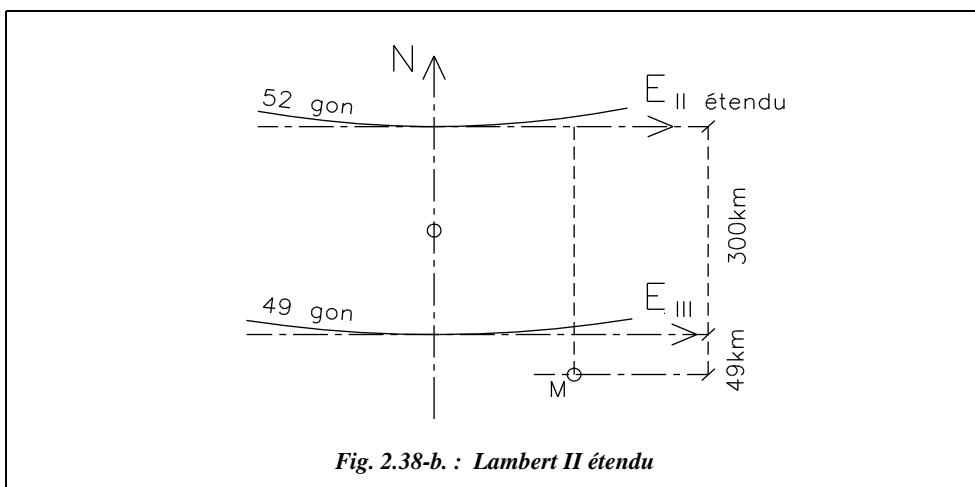
représente pas un numéro de zone mais l'ordonnée calculée par rapport à l'ordonnée origine vaut 2 200 m en zone II.

### Application

Aux altérations près, pourquoi à l'ordonnée 3 151 (Lambert III) « correspond » 1 851 (Lambert II étendu) ?

### Réponse

Il y a 300 km entre l'axe des X de la zone II d'ordonnée 2 200 et celui de la zone III d'ordonnée 3 200 (fig. 2.38-b.) ; donc il y a 349 km jusqu'au point M : son ordonnée, en zone Lambert II étendue est :  $2\,200 - 349 = 1\,851$  km.



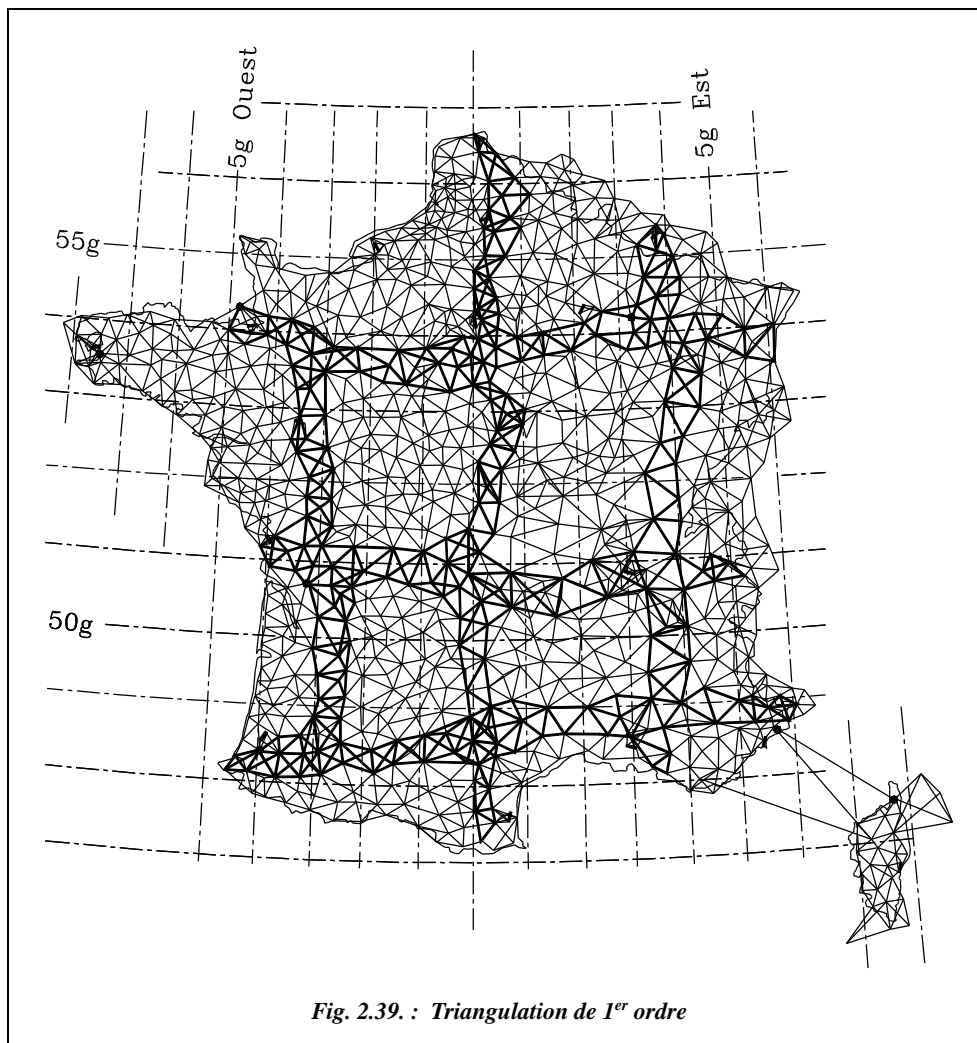
g) **Repères 9 et 10** : à l'extérieur du cadre, les amorces sont celles du quadrillage kilométrique *Universal Transverse Mercator* (UTM). Généralement, les fuseaux 29 et 31 sont chiffrés en noir, le fuseau 30 est chiffré en bleu.

h) **Repère 11** : échelle intérieure (voir le repère 4) d'intervalle 0,01 gon.

i) **Repère 12** : échelle extérieure (voir le repère 3) d'intervalle 1 minute.

## 5 RÉSEAUX GÉODÉSIQUES

Comme nous l'avons souligné en introduction de ce chapitre, un réseau de points connus en planimétrie est nécessaire pour effectuer la majorité des travaux de topographie. Ce n'est pas indispensable dans le cas où le travail sera effectué en repère local (petits chantiers ou chantiers isolés). L'Institut Géographique National (IGN) a donc implanté en France un réseau de points dits « géodésiques » (voir la carte figure 2.39. sur laquelle on distingue la triangulation du 1<sup>er</sup> ordre achevée en 1958).



La détermination des points géodésiques s'est faite par la méthode de **triangulation**, qui consiste à mesurer les angles et quelques côtés des triangles accolés dont les sommets sont les points géodésiques.

La résolution de ces triangles donne les positions relatives des sommets. Le problème étant d'implanter sur le territoire un ensemble plus ou moins dense de points, on procède par triangulations emboîtées (voir § 5.2) ou **ordres géodésiques** hiérarchisés, respectant ainsi le principe « aller de l'ensemble au détail ». Cela permet d'assurer une **précision homogène** entre les différents **ordres** de réseaux.

## 5.1 Historique de la triangulation <sup>1</sup>

Le but initial de la triangulation consiste à connaître la forme et les dimensions de l'ellipsoïde terrestre, puis d'autres objectifs sont venus s'y ajouter ; ainsi elle a servi :

- d'ossature à la carte de France à petite échelle ;
- de base à l'établissement des plans cadastraux à moyenne échelle ;
- de canevas pour les plans à grande échelle établis pour les grands travaux ;
- aux besoins militaires.

L'évolution a imposé des plans à des échelles de plus en plus grandes et donc des canevas de plus en plus précis :

- en 1792, Méchain (1744–1804) et Delambre (1749–1822) ont mesuré l'arc de méridien de Dunkerque à Barcelone en vue de la détermination de l'unité de longueur. Cette chaîne méridienne fut le point de départ de la triangulation qui a servi de base à la carte d'état-major au 1/80 000 ;
- en 1873 débutent les travaux de la **Nouvelle Triangulation Française (NTF)**. Mais il n'a pas été possible d'utiliser les points de l'ancienne car la précision s'est avérée insuffisante, de nombreux points étant des pins, hêtres, rochers gravés, tours, d'une conservation douteuse. On a donc cherché à constituer plusieurs ordres de triangulation avec des visées suffisamment nombreuses situées dans les différents quadrants et de longueur homogène. Les points ont été matérialisés par des bornes d'importance plus ou moins grande selon l'ordre ;
- en 1991, année de la dernière campagne de géodésie classique de l'IGN, la NTF a été déclarée achevée : elle s'était régulièrement enrichie au fil des années par densification à partir du réseau de 1<sup>er</sup> ordre jusqu'à atteindre une densité **d'un point pour 9 km<sup>2</sup> environ avec le 4<sup>e</sup> ordre**. Ses 70 000 sites géodésiques (sans compter les points de 5<sup>e</sup> ordre) sont uniformément répartis sur le territoire national avec **une précision relative moyenne de l'ordre de 10<sup>-5</sup>** (c'est-à-dire plusieurs centimètres au mieux par rapport au point le plus proche).
- le nouveau système géodésique RGF 93 est en préparation (voir § 5.3).

## 5.2 La nouvelle triangulation française (NTF)

Un siècle aura donc été nécessaire à l'élaboration de ce réseau (de 1873 à 1991). Il est constitué :

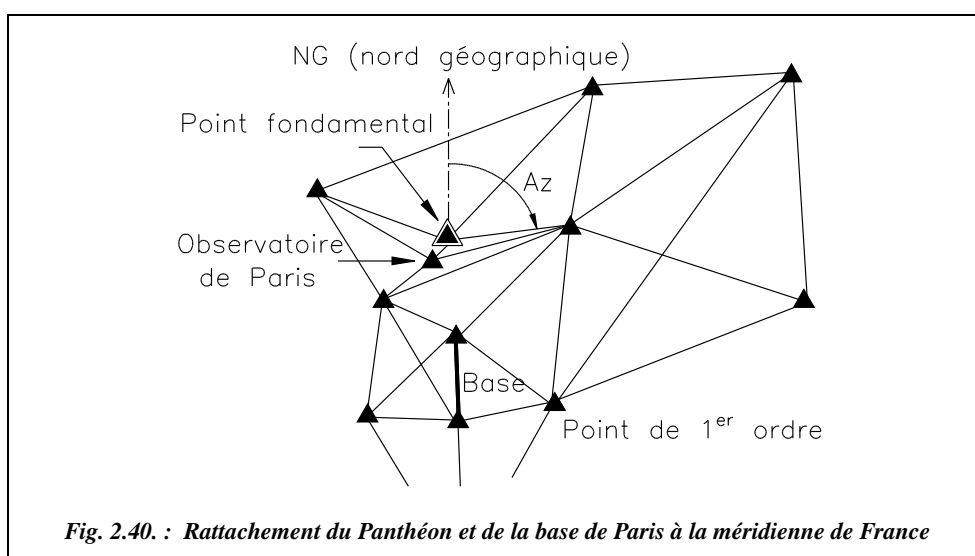
- **d'un point fixe, le point géodésique fondamental**, qui est la croix du dôme du Panthéon à Paris dont on a déterminé avec le maximum de précision les coordonnées géographiques déduites de l'observatoire de Paris de coordonnées géographiques :

$$\lambda = 0,0106\ 93\ \text{gon} ; \varphi = 54,273\ 618\ \text{gon}$$

<sup>1</sup> Consulter *Mesurer la terre*, J.-J. Levallois et al., Presses ENPC, 1988.

On y a aussi mesuré l'azimut astronomique du côté de départ de la triangulation. En ce point, la normale à l'ellipsoïde et la verticale qui est la normale au géoïde sont confondues ; l'ellipsoïde Clarke 80 y est tangent au géoïde. L'altitude et la hauteur ellipsoïdale sont égales.

- **de 15 bases géodésiques** d'une dizaine de km mesurées au fil Invar (précision 1 cm) réparties tous les 250 à 300 km ; elles sont destinées à réajuster les dimensions des triangles ;
- **des stations de Laplace**, servant à réorienter les côtés des triangles à chaque base ; par des visées astronomiques, on détermine en ces points l'azimut d'un côté du triangle.



### 5.2.1 Réseau de premier ordre

Il comprend les éléments suivants :

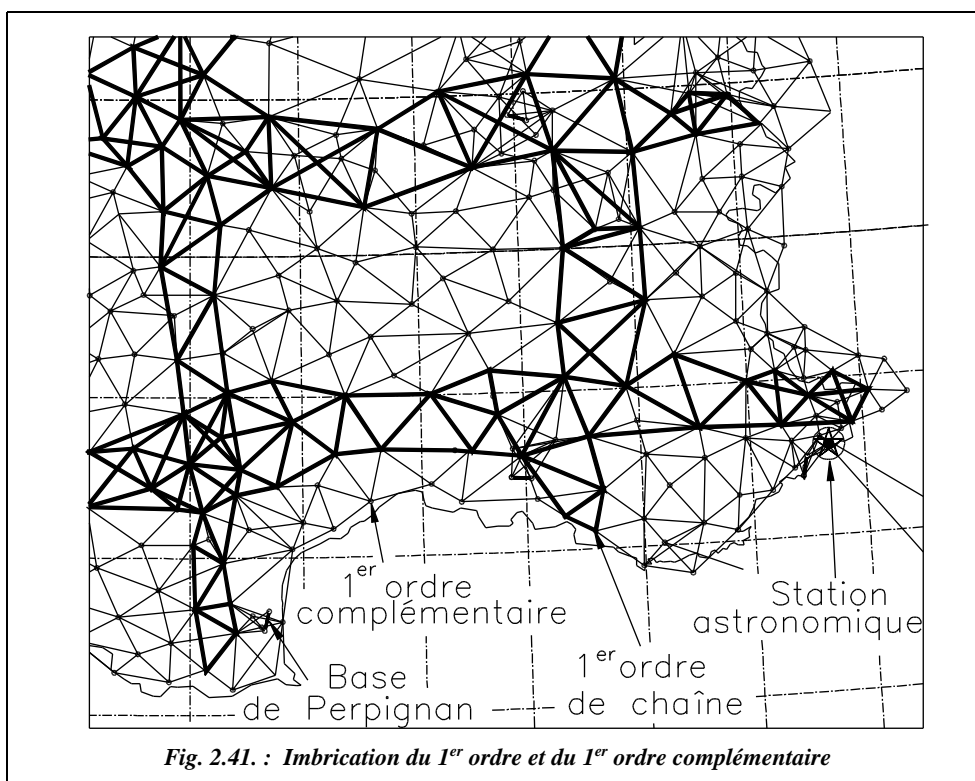
- le 1<sup>er</sup> ordre de chaîne : trois chaînes méridiennes ont été établies (celle de Bordeaux, celle de Lyon et celle de France qui passe par Paris) et trois chaînes parallèles, de Paris, Lyon et Toulouse (voir carte figure 2.39.). Ce sont des chaînes de triangles de 30 à 60 km de côtés et, dans chaque quadrilatère formé par deux triangles accolés, on détermine l'orientation de la deuxième diagonale ; ainsi, les mesures sont en sur-nombre (huit angles par quadrilatère). Les angles sont mesurés avec seize répétitions. Le 1<sup>er</sup> ordre de chaîne a été calculé sur l'ellipsoïde en coordonnées géographiques par fractions insérées entre deux bases (fig. 2.41.).
- le 1<sup>er</sup> ordre complémentaire, constitué par les points de 1<sup>er</sup> ordre compris dans les mailles formées par les chaînes méridiennes et parallèles. Il est calculé dans le plan de projection en coordonnées rectangulaires par blocs insérés entre les points précédemment déterminés. Les angles ont été mesurés au théodolite T3 (Leica) avec seize



réitérations ; pour les réduire au plan de projection, on applique la correction de  $dv$  (voir § 3.4.3.2).

Les triangulations de 1<sup>er</sup> ordre sont orientées par des azimuts astronomiques (stations de Laplace) et mises à l'échelle par des mesures de longueur. Les compensations ont été faites par la méthode des moindres carrés (calculs en bloc).

Il y a environ 860 points, formant 1 700 triangles de 30 à 40 km de côtés ; 5 000 directions ont été observées. La précision moyenne d'une observation est de 2 dmgon, soit environ 13 cm à 40 km. En règle générale, on considère que les points de 1<sup>er</sup> ordre sont déterminés à 10 cm près, soit une précision relative d'environ 1/400 000 sur les côtés.

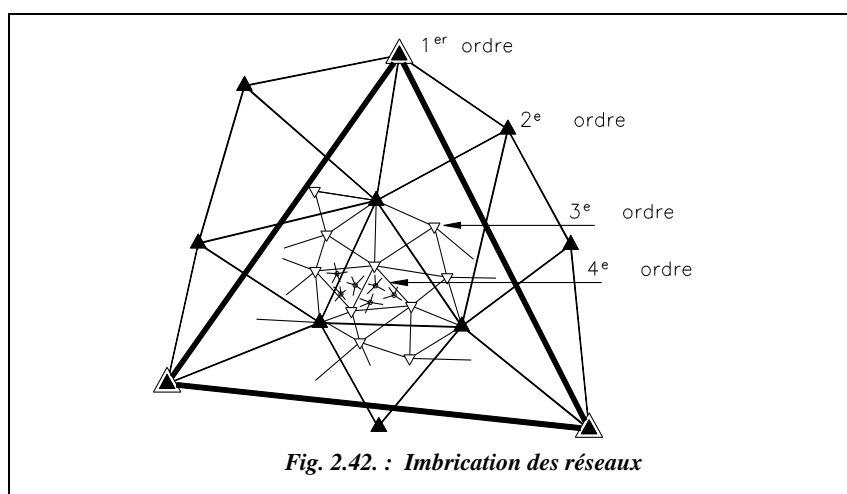


Son manque de précision tient plus à la qualité non optimale des calculs : en effet le réseau s'appuie sur un calcul de la méridienne de France datant des années 1930 et sur le calcul du 1<sup>er</sup> ordre terminé vers les années soixante ; il n'était pas possible à cette époque de traiter la totalité des observations de 1<sup>er</sup> ordre, alors qu'aujourd'hui il suffit de quelques minutes pour traiter les observations des 6 200 points de 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> ordre de la NTF grâce à l'informatique.

### 5.2.2 Réseaux de détail

Pour atteindre la densité requise tout en maintenant la précision relative du 1<sup>er</sup> ordre, on établit successivement les réseaux emboîtés suivants (fig. 2.42.) :

- triangles de 2<sup>e</sup> ordre dont les côtés mesurent 12 à 15 km environ : appuyés sur les points du 1<sup>er</sup> ordre, ils sont calculés par blocs d'une dizaine de points ;
- triangles de 3<sup>e</sup> ordre dont les côtés mesurent 8 à 12 km environ : appuyés sur les ordres supérieurs, ils sont calculés comme ceux du 2<sup>e</sup> ordre ;
- triangles de 4<sup>e</sup> ordre dont les côtés mesurent 3 à 4 km environ : ces points sont généralement calculés en points isolés à partir de visées de 3 à 6 km.



Dans chaque triangle d'un ordre donné, il y a environ trois points de l'ordre immédiatement inférieur.

Les angles ont été mesurés au théodolite T3 (Wild) avec huit réitérations pour le 2<sup>e</sup> ordre et au théodolite T2 (Wild) avec quatre réitérations pour les 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> ordres. Pour les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> ordres, les visées ont généralement été observées dans les deux sens, ce qui permet de fermer les triangles et de déceler ainsi les anomalies. Les compensations sont faites par la méthode des moindres carrés par groupe de deux à dix points.

### 5.2.3 Réseau de cinquième ordre ou triangulation complémentaire

La densité du 4<sup>e</sup> ordre est insuffisante pour rattacher directement les cheminements topographiques. Dans certaines zones, on a donc établi une triangulation complémentaire. Chaque détermination a été faite en général par relèvement (voir tome 2 chap. 1 § 6 et 7) avec deux réitérations au théodolite T2. Le Tableau suivant récapitule les ordres de triangulation.

Structure	Ordre	Espacement	Nombre	Précision
Réseau principal	1 <sup>er</sup>	30 km	800	10 <sup>-5</sup>
	2 <sup>e</sup>	10 km	5 000	10 <sup>-5</sup>
	3 <sup>e</sup> et 4 <sup>e</sup>	3 km	60 000	10 <sup>-5</sup>
Réseau complémentaire	5 <sup>e</sup>		20 000	diverse

## 5.2.4 Matérialisation des points géodésiques

### 5.2.4.1 Borne géodésique

Une borne est un bloc solide en granit dont la partie émergeant du sol est un cube de 15 cm d'arête. La face supérieure horizontale porte une croix gravée matérialisant le repère supérieur.

La borne repose sur une dalle. La borne et la dalle sont prises dans un bloc de béton. Sous celui-ci, séparé de lui par une couche de terre meuble, est coulé un bloc de béton dans lequel est ménagé un orifice circulaire au fond duquel se trouve un repère métallique inférieur recouvert de charbon de bois. La borne est placée de sorte que le repère supérieur et le repère inférieur soient à l'aplomb l'un de l'autre.

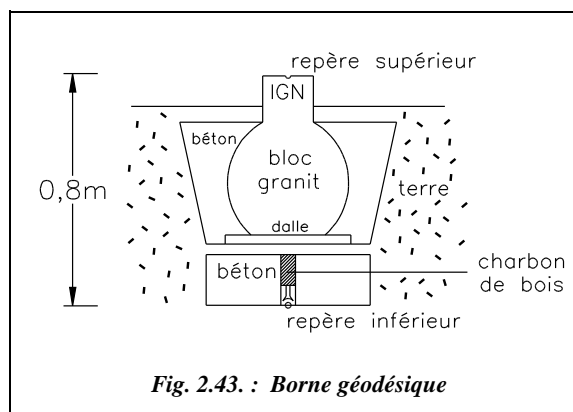
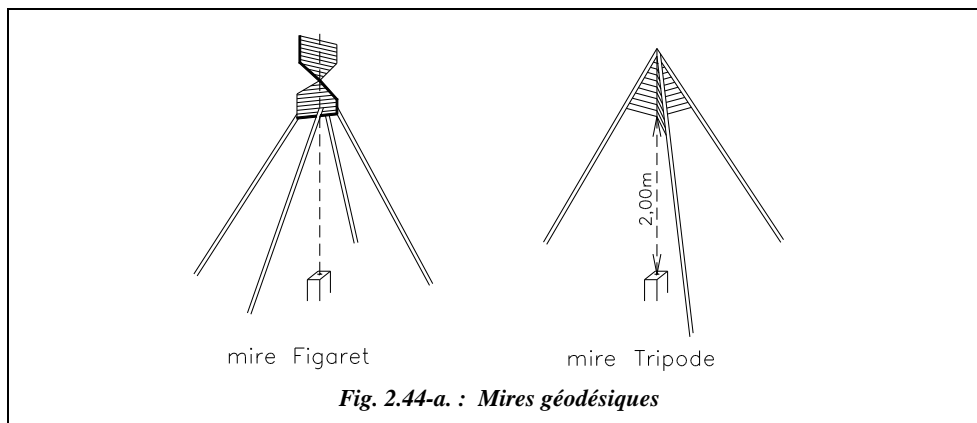


Fig. 2.43. : Borne géodésique

La profondeur de l'ensemble est environ 0,80 m, et le poids du bloc de granit est de l'ordre d'une tonne.

### 5.2.4.2 Mire géodésique

C'est un ensemble de panneaux de forme géométrique, en bois ou en métal, ayant un axe vertical centré au-dessus d'une borne ou d'un rivet (en montagne). Les mires géodésiques permettent l'observation éloignée de ces points. Les mires métalliques sont démontables. La hauteur des panneaux et la disposition des montants permettent de mettre un appareil en station sous la mire (fig. 2.44-a.).



### 5.2.4.3 Signal

Le signal est une construction ayant un axe de symétrie vertical situé au-dessus d'un repère et permettant l'observation éloignée de celui-ci. Le signal est en général géodésique : cheminée, pylône etc. ; il est souvent pérenne alors que les mires géodésiques sont provisoires.

Par extension est englobé sous ce terme toute construction pouvant être observée : cheminées, pylônes, mires géodésiques, balises.

## 5.2.5 Répertoires de l'IGN

L'Institut géographique national publie pour chaque feuille au 1/50 000 un répertoire comprenant :

- une réduction de cette feuille sur format A4 avec l'emplacement de chaque point géodésique et son numéro d'ordre dans la feuille ;
- la fiche signalétique de chaque point : c'est un document d'archives et de diffusion qui contient :
- des renseignements d'ordre administratif : nom du point, nom et numéro de la feuille au 1/50 000, département, numéro de l'arrêté de servitude, renseignements cadastraux ;
- des renseignements d'ordre technique : désignation du type de borne et des repères auxiliaires, indication d'un point naturel connu pouvant servir d'orientation sur un point inconnu, situation topographique, plan des environs, croquis de repérage, nature et date de la mission et les coordonnées planimétriques  $X, Y$  ( $E, N$ ) centimétriques.

L'altitude  $H$  est déterminée par nivellement indirect géodésique (chap. 6, § 2) avec une précision décimétrique.

Les fiches signalétiques sont stockées sur microfiches X, Y, Z vendues par l'IGN (une microfiche contient 60 points). Depuis fin 1997, tous les points du RBF (voir § 5.3) et de la NTF de 30 départements sont accessibles par minitel (08 36 29 01 29; 9,21<sup>F</sup> par minute au 1/1/98)

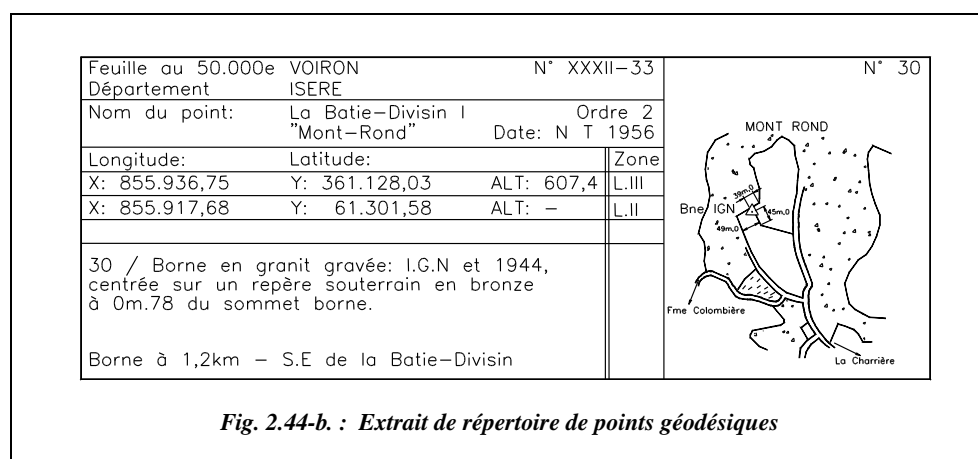


Fig. 2.44-b. : Extrait de répertoire de points géodésiques

## 5.3 Le nouveau réseau géodésique français

De nombreux points sont difficilement accessibles, souvent inexploitable car non entretenus, et leur localisation n'est pas toujours celle souhaitée par l'utilisateur.

La précision de la NTF est estimée à  $10^{-5}$  en relatif (1 cm par km) ; elle est insuffisante compte tenu des techniques modernes de positionnement, en particulier le positionnement satellitaire par GPS qui donne une précision relative de  $10^{-6}$  voire de  $10^{-7}$  à  $10^{-8}$ .

Déjà le niveau de précision de la NTF avait été mis en question par ses utilisateurs dès l'apparition des distancemètres optoélectroniques précis dans les années 70.

Un réseau géodésique moderne doit donc être constitué de points :

- accessibles,
- d'une précision suffisante,
- exploitables par l'utilisateur en fonction des moyens dont il dispose : théodolites, distancemètres, récepteurs GPS .

Donc la NTF ne répond plus aux besoins des utilisateurs ; de plus, il est maintenant nécessaire de disposer d'un système de référence au niveau européen. Il a donc été envisagé :

- de mettre en place un nouveau canevas national appelé **Réseau Géodésique Français (RGF)**, qui matérialisera un **nouveau système de référence nommé RGF 93**, tridimensionnel et géocentrique, constituant une réalisation précise du système WGS 84 ;

il est organisé en trois niveaux principaux : le **RRF**, le **RBF** et le **RDF** c'est-à-dire réseau respectivement de référence, de base et de détails français ;

- de maintenir ce réseau par des observations GPS.

Le but est d'obtenir un réseau dont les coordonnées tridimensionnelles dans un système de référence géocentrique (voir § 2.2.3.1) sont connues avec une précision de qualité spatiale. La NTF continuera d'exister au sein du RGF, qui intégrera la quasi totalité des anciens points géodésiques (de cinq ordres).

### 5.3.1 Définition du réseau géodésique français (RGF 93)

#### 5.3.1.1 *Système de référence*

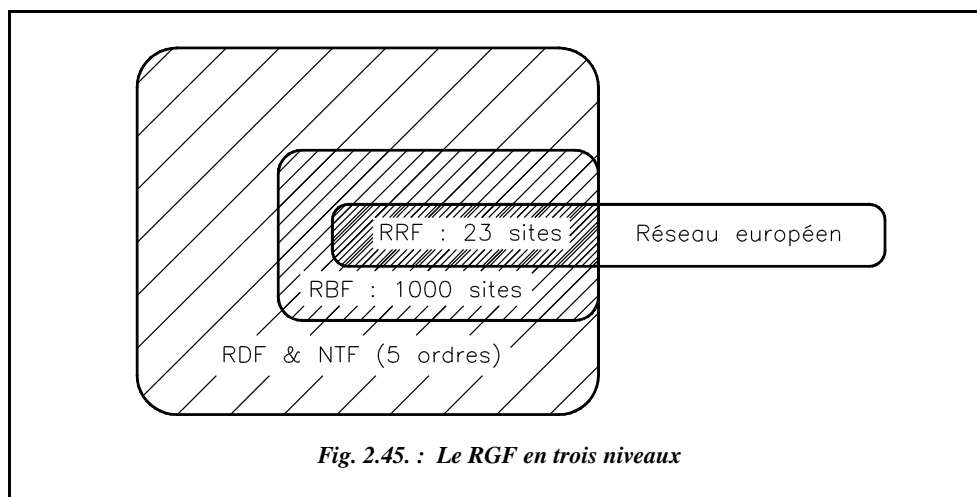
Ce système géodésique, appelé Réseau Géodésique Français 1993 (RGF 93) est spatial, tridimensionnel et géocentrique ; il sert de base à la création d'un réseau géodésique moderne français par densification des points européens du réseau mondial associé ETRS 89 (*European Terrestrial Reference System 1989*). Le système ETRS 89 est défini à partir de l'ITRS (*International Terrestrial Reference System*) et coïncide avec lui à l'époque 1989. L'ITRS, système mondial de référence terrestre de l'IERS (*International Earth Rotation Service*), prend en compte les déformations de la croûte terrestre et en particulier celles dues à la tectonique des plaques ; il est matérialisé par un réseau mondial d'environ 200 points obtenus avec des précisions centimétriques par des techniques spatiales très précises comme VLBI (voir § 5.3.2.1), Laser ou GPS très précis. Ce système évolue et ses différentes réalisations sont appelées ITRF nn, où nn signifie l'année de la réalisation, ITRF 96 étant la plus récente.

De même, l'ETRF nn, réalisation de l'ETRS utilise des points ITRF nn européens et des points de densification par GPS. L'ETRS est rattaché à la partie stable de la plaque Eurasie ; il présente l'avantage de rendre négligeables presque partout en Europe les déplacements des stations dus à la tectonique des plaques. Ce système est de type tridimensionnel, mais l'altitude est fournie dans le système altimétrique actuellement en vigueur (IGN 69).

La technique d'observation des points du RGF 93 est celle de la mesure satellitaire GPS assurant une cohérence de niveau centimétrique aux coordonnées publiées des différents points. Les coordonnées sont fournies, soit sous forme de longitude  $\lambda$ , latitude  $\varphi$  et hauteur ellipsoïdale  $h$  sur l'ellipsoïde IAGRS 80, soit sous forme bi-dimensionnelle, selon la projection Lambert 93.

#### 5.3.1.2 *Structure hiérarchique*

En France, le réseau Géodésique Français (RGF) matérialise ce nouveau système de référence RGF 93. Ce réseau est structuré en trois parties (fig. 2.45.) :



**le Réseau de Référence Français (RRF) :** c'est la partie française du réseau européen dont la première réalisation date de 1989. C'est aussi le premier niveau hiérarchique du RGF, **constitué de 23 sites répartis sur l'ensemble de la France métropolitaine ;**

**le Réseau de Base Français (RBF) :** il comprend environ 6 000 points (1 009 sites observés par GPS et nouvelle compensation des observations de 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> ordre de la NTF) ;

Nom	Structure	Espacement	Nombre	Précision
<b>RRF</b>	Réseau spatial	200 km	23	$10^{-7}$
<b>RBF</b>	Les 1 000 GPS plus 1 <sup>e</sup> et 2 <sup>e</sup> ordres de la NTF	12 km	6 000	$10^{-6}$
<b>RDF</b>	Nouveaux points implantés sur les lignes de nivellement des 1 <sup>er</sup> , 2 <sup>e</sup> et 3 <sup>e</sup> ordres	3 km	30 000	quelque $10^{-6}$

**le Réseau de Détails Français (RDF) :** c'est par densification du RBF que sera réalisé le réseau de détail (environ 80 000 points). Dans un premier temps, le RDF sera constitué des points de la NTF. Ci-dessous est donné un tableau récapitulatif des différents réseaux :

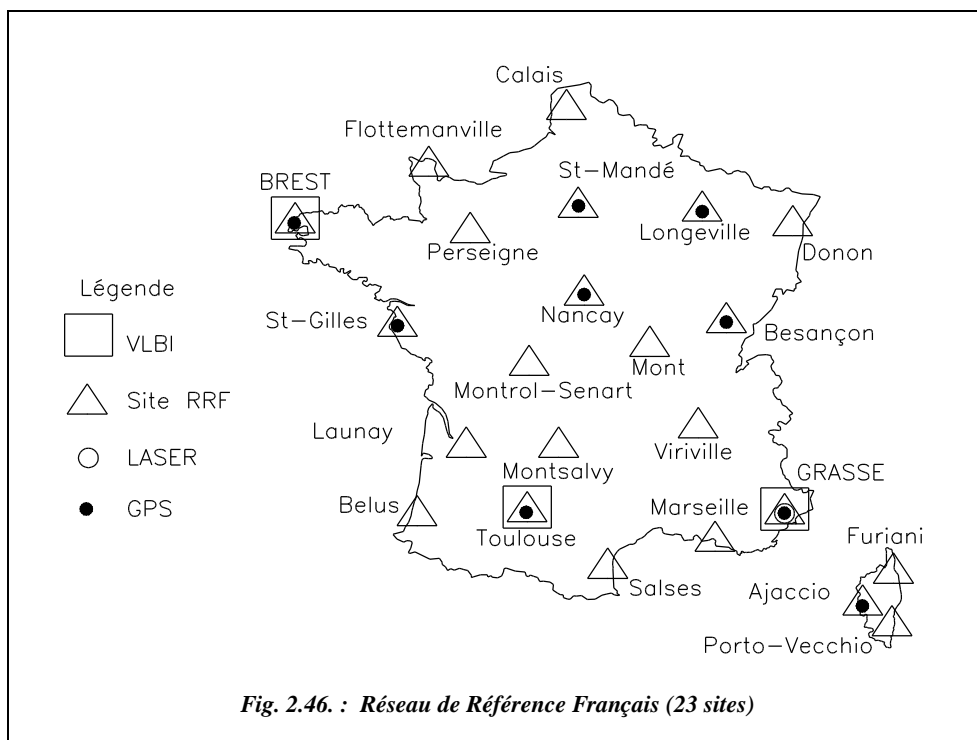
### 5.3.2 Réalisation du réseau général français (RGF)

La réalisation d'un système de référence est l'ensemble des repères qui le matérialisent (voir § 2.2.4).

### 5.3.2.1 Établissement du réseau RRF

Le Réseau de Référence Français (RRF) possède 23 points (fig. 2.46.). Il se caractérise comme suit :

- une précision relative de 0,1 ppm ( $10^{-7}$ , soit 0,1 mm/km) ; la précision entre deux sites du RRF est centimétrique, et sa cohérence vis-à-vis du réseau européen est également centimétrique ;
- une campagne *Very Long Base Interferometry* (VLBI) ; c'est la technique la plus précise de positionnement ; elle fait appel à des mesures astronomiques. Cette campagne a permis de déterminer six points en Europe dont deux en France : Brest et Grasse. Les coordonnées de ces points sont connues avec une précision relative de 0,01 ppm (1 cm sur 1 000 km ; remarquons qu'à ce niveau de précision, la dérive des continents n'est plus négligeable !) ;
- ces points ont servi d'appui à 93 points observés la même année par une campagne GPS, dont six nouveaux points en France : Saint-Mandé, Longeville, Nançay, Saint-Gilles et Toulouse. Ils sont en quelque sorte le réseau de base du RRF ;
- puis trois campagnes pour les 15 autres sites représentant le réseau complémentaire du RRF.





Le RRF participant à l'élaboration des réseaux européens et intercontinentaux, il permet au RGF d'être cohérent avec les références mondiales.

### **5.3.2.2**      ***Établissement du réseau de base français (RBF)***

Le Réseau de Base Français (RBF) possède 1 009 points (y compris le réseau RRF).

Il est le deuxième niveau hiérarchique du RGF et comprend un millier de sites géodésiques uniformément répartis tous les 25 km en moyenne ; leurs coordonnées sont déterminées à partir de celles du RRF par des méthodes GPS permettant de conserver la précision centimétrique (précision relative  $\approx 4 \cdot 10^{-7}$ ).

Il est plus particulièrement destiné aux utilisateurs de GPS qui pourront, grâce au RBF, se positionner au centimètre près, partout en France, en utilisant des méthodes GPS monofréquence, ou GPS statique-rapide. 63 % des sites sont entièrement nouveaux et 37 % sont des sites anciens NTF repris et complétés. Ces points sont déjà disponibles sous forme de fiches imprimées (comme les points géodésiques de la NTF).

Les principales caractéristiques du RBF sont les suivantes :

- la présence d'au moins deux repères par site, de définition millimétrique ;
- l'accessibilité à tout véhicule, par tout temps (à moins de 30 m) ;
- son adaptabilité à tout type d'exploitation, aussi bien traditionnelle que par GPS : il y a possibilité de mise en station et absence de masque en direction du Sud ;
- des coordonnées de précision centimétrique dans le nouveau système RGF 93 ;
- les coordonnées NTF (Lambert) et les altitudes NGF seront disponibles.

La plupart de ces sites étant rattachés directement à des points NTF et à des repères NPF, le RBF fournira de nombreux points dans les différents systèmes (NTF et WGS 84). L'étude des différents jeux de coordonnées ainsi disponibles permettra à l'IGN de définir des procédés de transformation permettant de passer aisément d'un système géodésique à l'autre ; ces paramètres de transformation seront vraisemblablement fournis pour chaque feuille au 1/25 000.

### **5.3.2.3**      ***Établissement du réseau de détails français (RDF)***

**Le Réseau de Détails Français (RDF)** sera constitué d'un nouveau canevas de points le long des 75 000 km lignes des 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> ordre du NPF (Nivellement de Précision de la France, voir § 6). Les caractéristiques générales sont les suivantes :

- les points seront situés le long des itinéraires du NPF : un point RDF tous les trois kilomètres soit **25 000 points** et **5 000 points** complémentaires choisis entre les lignes des trois ordres du NPF ;
- coordonnées RGF 93 déterminées par GPS (statique rapide) en s'appuyant sur le RBF ;
- déterminations altimétriques subcentimétriques (altitudes normales).

### 5.3.3 Matérialisation

Pour garantir une précision relative de 1 ppm (1 mm par km), la définition géométrique des points doit être millimétrique.

Pour le RRF, le type de matérialisation retenu est une borne de 1 m<sup>3</sup> de béton implantée au ras du sol, doublée par une borne de 0,5 m × 0,5 m × 0,8 m. Les deux bornes ont au centre de leur face supérieure un repère en laiton du type IGN.

Pour le RBF, il faut distinguer :



a) 37 % des sites appartenant à la NTF : on retrouve la borne en granit gravée IGN : au centre de la croix gravée au sommet de la borne est rajouté un repère en laiton permettant un centrage de précision millimétrique et une meilleure définition altimétrique. D'autre part, généralement sur le radier est apposée une plaque identificatrice en bronze (ci-contre) signalant que ce point géodésique a bien été à nouveau déterminé dans le nouveau système RGF.

b) 63 % des sites entièrement nouveaux ; deux types de matérialisation ont été conçus :

- une borne dite « borne RBF lourde », constituée d'un bloc de béton cylindrique de 50 cm de diamètre pour un mètre de profondeur. La partie visible est un radier carré à ras du sol de 60 cm de côté, muni d'un repère hémisphérique en laiton en son centre, et signalé par la plaque identificatrice de l'IGN (ci-dessus) ;
- une borne préfabriquée en polyester-béton (béton armé de fibres) dite « borne RGF légère » ancrée au sol ; la tête de section carrée de 15 cm de côté et de couleur jaune affleure ; un repère hémisphérique est scellé en son centre et la plaque identificatrice est remplacée par les trois lettres IGN gravées sur une plaque en aluminium.

### 5.3.4 Système RGF 93

Une nouvelle projection plane a été choisie pour exprimer les coordonnées RGF 93 ; bien que de type Lambert, ses paramètres n'ont rien de commun avec le Lambert associé au système NTF. C'est une projection unique pour le territoire métropolitain.

Le tableau suivant donne les caractéristiques de cette nouvelle projection comparées à celles du Lambert II étendu de la NTF.

Projection Lambert II étendu associée au système NTF	Projection Lambert 93 associée au système RGF 93
Ellipsoïde : Clarke 1880 IGN • demi-grand axe $a = 6\,378\,249,20$ m • aplatissement $1/293,466\,021$	Ellipsoïde : IAGRS 80 • demi-grand axe $a = 6\,378\,137$ m • aplatissement $1/298,257\,222\,101$
Projection conique conforme • parallèles d'échelle conservée ( $kr = 0$ ) : $\varphi_1 = 45^\circ 53' 56'' 108\,27$ N ( $50,998\,799$ gon) $\varphi_2 = 47^\circ 41' 45'' 652\,21$ N ( $52,995\,572$ gon) $m_l = 1 - 12,258 \cdot 10^{-5}$ • méridien central : $\lambda_0 = 2^\circ 20' 14'' 025$ E Greenwich • latitude origine : $\varphi_0 = 46^\circ 48'$ N ( $52$ gon) • coordonnées de l'origine : $X_0 = 600$ km ; $Y_0 = 2\,200$ km	Projection conique conforme • parallèles d'échelle conservée ( $kr = 0$ ) : $\varphi_1 = 44^\circ$ N ( $48,888\,889$ gon) $\varphi_2 = 49^\circ$ N ( $54,444\,444$ gon) $m_l = 1 - 94,885 \cdot 10^{-5}$ • méridien central : $\lambda_0 = 3^\circ$ E Greenwich • latitude origine : $\varphi_0 = 46^\circ 30'$ N ( $51,666\,667$ gon) • coordonnées de l'origine : $X_0 = 700$ km ; $Y_0 = 6\,600$ km

À partir des études basées sur les 1 000 sites du RBF, l'IGN calcule pour toute la France métropolitaine un modèle de paramètres de transformation (voir § 2.2.2) passant du RGF 93 à la NTF et réciproquement, d'une précision décimétrique. Il est suffisant pour de nombreuses applications où une diffusion des coordonnées d'un chantier en système NTF est nécessaire, pour des raisons réglementaires ou contractuelles.

#### Remarque

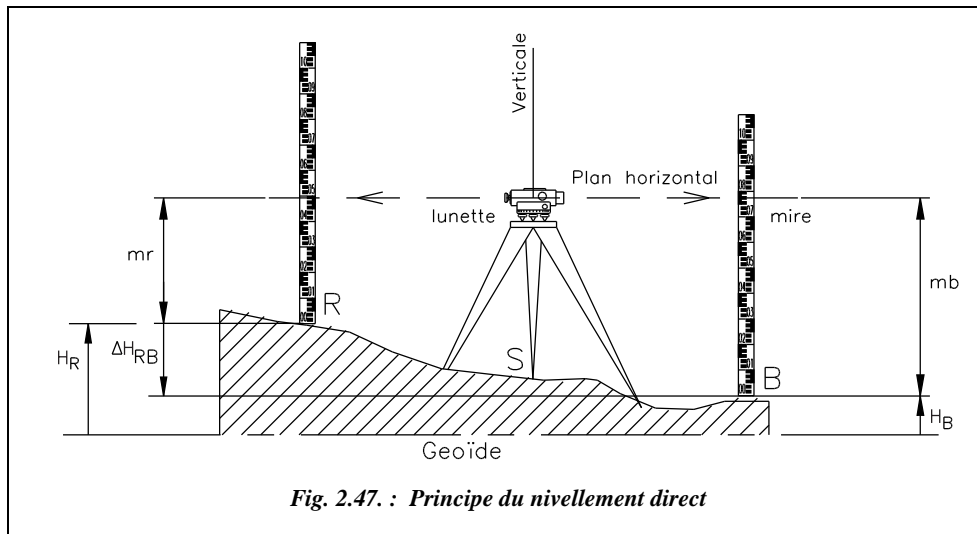
L'avantage principal d'un tel système est son universalité et son adéquation avec le système WGS 84 du GPS.

Le principal inconvénient est que, du point de vue de la pratique quotidienne de la topométrie, les altérations linéaires qu'il induit sont trop importantes : près de 3 cm pour 10 m à Dunkerque, 1,5 cm pour 10 m à Perpignan et - 1 cm pour 10 m au voisinage de l'isomètre centrale  $46^\circ 30'$ .

Pour mieux comprendre les problèmes que cela pose aux géomètres, reportez vous à l'article « incontournable géodésie » d'André Fontaine dans la revue XYZ n° 79 de juin 99.

## 6 RÉSEAU ALTIMÉTRIQUE

Intuitivement, la différence d'altitude entre deux points sur une même verticale apparaît comme la distance séparant ces deux points sur cette verticale ; le principe des mesures de ces distances appelées dénivelées est le nivellement direct (fig. 2.47. ; voir également le chapitre 5).



Une lunette appelée niveau décrit un plan horizontal en pivotant autour d'un axe vertical. Elle permet de lire les hauteurs  $mr$  et  $mb$  sur deux règles graduées appelées mires, positionnées successivement sur un repère R et un point B (fig. 2.47.).

La différence d'altitude  $\Delta H_{RB} = H_B - H_R$  entre R et B est égale à  $(mr - mb)$ . Il est donc possible de déduire l'altitude de B si on connaît celle de R :

$$H_B = H_R + (mr - mb)$$

Il en découle une définition de l'altitude d'un point : c'est la distance de ce point à la surface de niveau origine (géoïde défini au paragraphe 2.1.) le long de la verticale physique passant par ce point. Or, le géoïde est quasiment le niveau moyen des mers. Il est donc impossible de faire toutes les mesures en partant chaque fois du bord de la mer. Il est donc nécessaire que des repères d'altitude soient répartis sur tout le territoire.

## 6.1 Surfaces de référence et altimétrie

Nous avons défini au paragraphe 2. deux types de surfaces : **le géoïde et l'ellipsoïde**. Nous allons maintenant les définir à nouveau en nous intéressant au champ de pesanteur terrestre ; la seule orientation accessible partout à moindre coût est la direction de la verticale donnée par les nivelles des appareils de topométrie ou par le fil à plomb : c'est donc une référence obligée pour le topographe.

Les verticales locales étant les directions de la pesanteur, on peut définir des surfaces perpendiculaires à ces directions ; ces surfaces sont des **équipotentielles du champ de pesanteur**. Ces surfaces sont donc **de même niveau** (la surface de niveau zéro étant le géoïde) ; une surface de niveau est telle qu'entre deux points, l'eau ne s'écoule pas.

En réalité, la pesanteur variant avec l'altitude et surtout la latitude ( $g$  augmente de l'équateur vers les pôles), les surfaces équipotentielles de la pesanteur **ne sont pas parallèles**. Ceci implique que deux points situés à la même hauteur au-dessus du géoïde ne sont pas forcément à la même altitude ou encore que deux points situés « au même niveau » (sur la même équipotentielle) ne seront pas à la même distance du géoïde, ce qui remet en cause la définition de l'altitude donnée ci-dessus.

### Remarque

Une surface équipotentielle du champ de pesanteur n'est pas une surface à l'accélération de la pesanteur  $g$  constant. En effet, l'espacement entre deux équipotentielle varie d'un endroit à un autre en fonction des variations de l'intensité du champ de pesanteur. Lorsque ces équipotentielles se rapprochent, l'intensité du champ augmente, ce qui se traduit par des valeurs plus importantes de l'accélération de la pesanteur  $g$ . Une surface équipotentielle est donc perpendiculaire en tout point à la verticale locale (le plan tangent à la bulle d'une nivelle se confond avec cette surface) mais n'est pas une surface à  $g$  constant (ce qui est dommage car il est plus facile de mesurer  $g$  que l'angle de déviation de la verticale locale).

Montrons que les surfaces équipotentielles, donc de même niveau, ne sont pas parallèles (fig. 2.48.) : soient deux surfaces de niveau infiniment voisin  $W_a$  et  $W_b$  ; il faut faire appel à la notion de travail accompli contre la pesanteur : il est égal au produit de l'accélération de la pesanteur par le déplacement vertical de la masse soulevée ; soit, pour

une masse unité :  $W_A^B = \int_A^B g \cdot dh$

Ce travail est indépendant du chemin suivi, donc :  $W_A^B = W_A^{B'} + W_{B'}^B = W_A^{A'} + W_{A'}^B$ .

Or, le travail sur une surface de niveau est nul :  $W_{B'}^B = W_{A'}^{A'} = 0$  donc  $W_A^{B'} = W_{A'}^B$ .

Les produits  $(AB' \cdot g_a)$  et  $(A'B \cdot g_b)$  sont égaux (en supposant que les surfaces soient suffisamment voisines pour que  $g_a$  soit constant entre A et B' et  $g_b$  constant entre A' et B). A et B étant à des latitudes différentes, on sait que  $g_a \neq g_b$  donc on en déduit que :

$$AB' \neq A'B$$

La valeur de  $g$  augmentant de l'équateur aux pôles, les surfaces de même niveau se rapprochent vers le pôle.

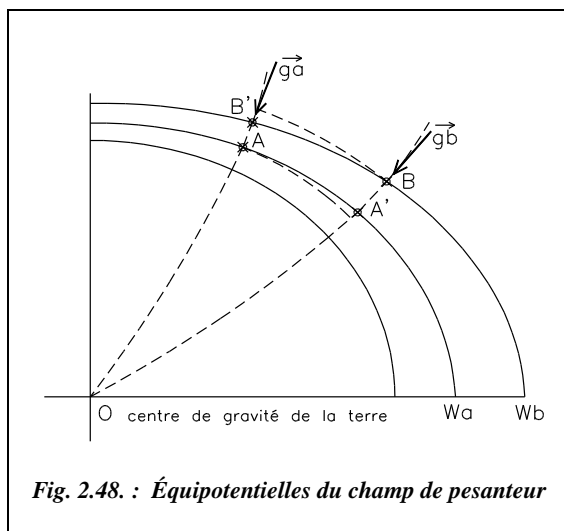


Fig. 2.48. : Équipotentielle du champ de pesanteur

Si les océans n'étaient traversés d'aucun courant, s'ils étaient de densité constante et s'ils étaient au repos, leur surface décrirait une équipotentielle du champ de pesanteur (écoulement nul). Cette surface, proche du niveau moyen de la mer, a été prise pour origine des altitudes orthométriques : on l'appelle donc **géoïde** ; le géoïde, assez proche d'un ellipsoïde de révolution, présente par rapport à celui-ci des irrégularités n'excédant jamais 100 m (voir carte fig. 2.49-a.) ; on détermine donc l'ellipsoïde qui est le plus proche du géoïde et on privilégie cette surface puisqu'elle se décrit mathématiquement.

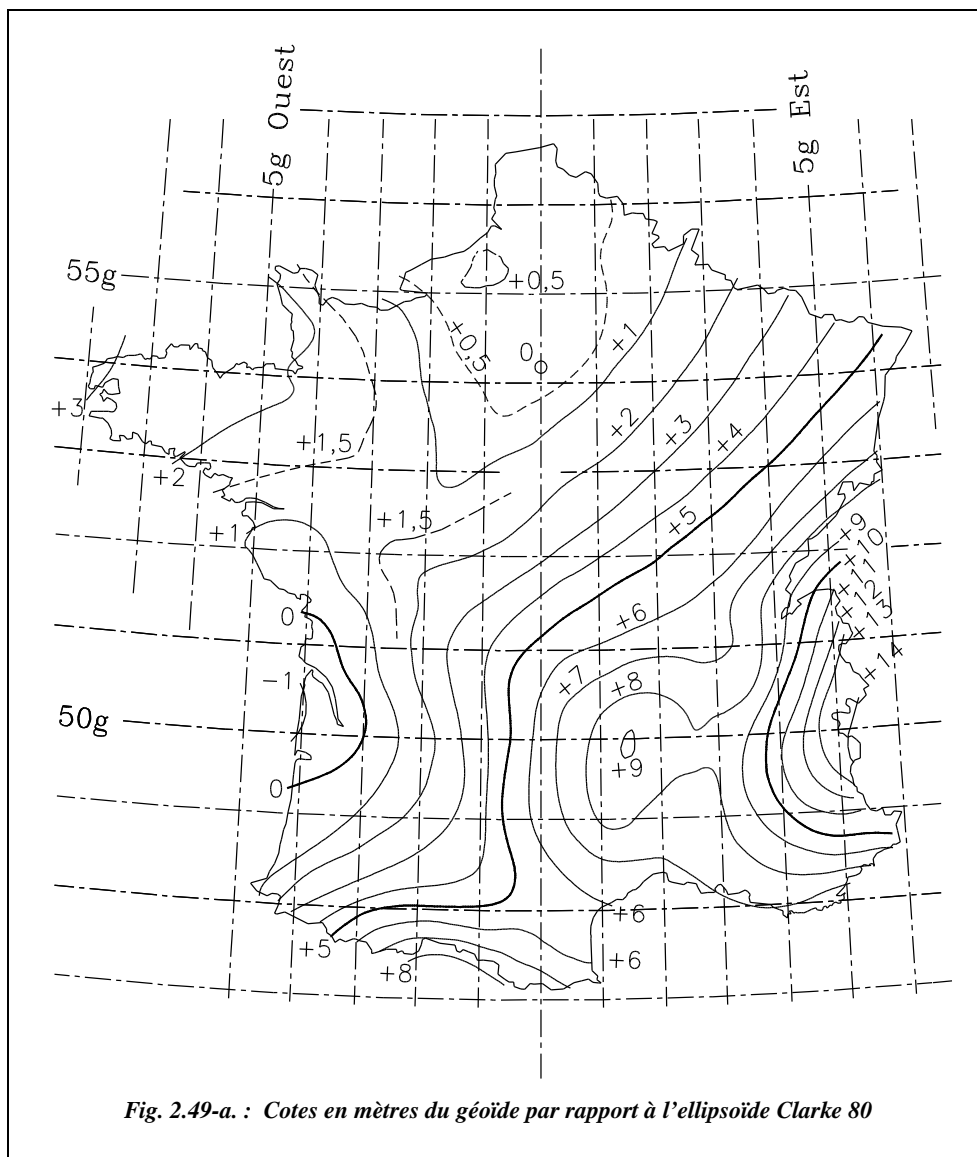
Il est donc facile de repérer tout point par rapport à sa position sur l'ellipsoïde par trois nombres, par exemple **une longitude, une latitude et une hauteur**. En France, l'ellipsoïde de Clarke est tangent au géoïde au point fondamental : le Panthéon à Paris (voir § 5.2).

Le géoïde est donc la surface de référence des altitudes, mais :

- quoique proche du niveau de la mer, le géoïde en est toujours distinct puisque le niveau moyen des mers ne cesse de changer au cours du temps (mouvements de l'écorce terrestre, fonte des glaces polaires, etc.) ;
- c'est une surface fictive et difficilement accessible à l'observation directe (on peut procéder à des mesures astrogéodésiques de déviations de la verticale locale par visées astronomiques au moyen d'une caméra zénithale) ;
- elle ne représente pas une surface à accélération  $g$  constante.

#### Remarque

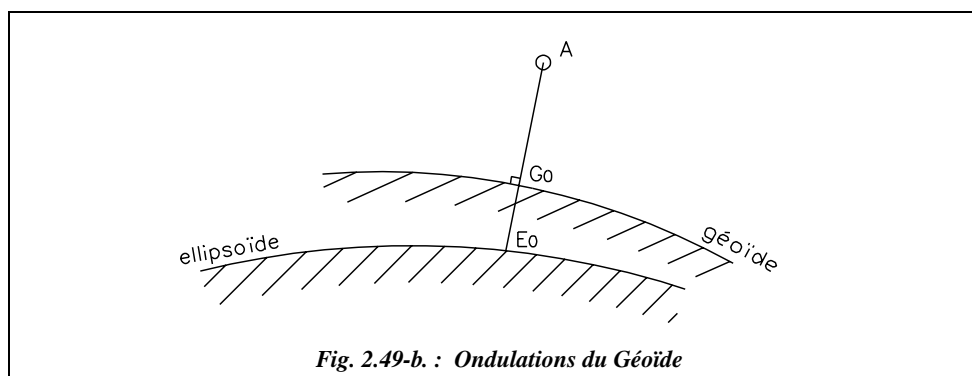
On écrit souvent la relation entre  $H$  (hauteur au-dessus du Géoïde ou altitude) et  $h$  (hauteur au-dessus de l'ellipsoïde) sous la forme  $H = h - \Delta$  où  $\Delta$  est la **séparation du géoïde** (sa hauteur au-dessus de l'ellipsoïde de Clarke, fig. 2.49-a.). Un **modèle de géoïde** est une base de données de valeurs de  $\Delta$  pour des points connus dans le système Lambert.



Par exemple, considérons le point A de coordonnées  $\lambda = 3$  gon Est Paris et  $\varphi = 52$  gon Nord ; on lit sur la carte (fig. 2.49-a.) : + 5,50 m. Hauteur au-dessus de l'ellipsoïde (fig. 2.49-b.) :

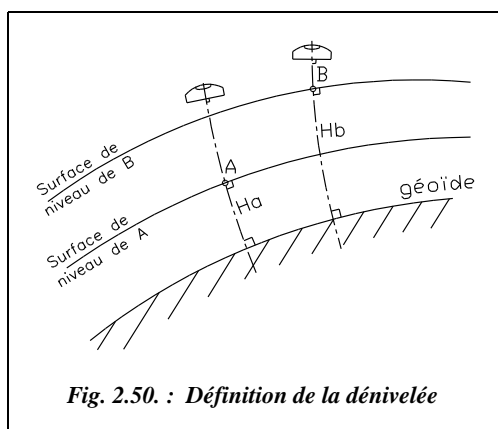
- $h_A = G_0A + E_0G_0$ .
- $G_0A$  est l'altitude  $H_A$  de A.
- $E_0G_0 = 5,5$  m.

Donc :  $h_A = H_A + 5,50$  m.



## 6.2 Choix d'un système d'altitude

Définir le géoïde ne résout pas tous les problèmes ; en effet, on a vu dans la démonstration précédente que si l'on additionne les dénivelées pour passer d'un point à un autre (ici de A à B), on trouve un résultat qui dépend du chemin suivi puisque les équipotentielles ne sont pas parallèles. **On ne peut donc pas définir l'altitude comme on aurait pu le penser, c'est-à-dire en portant sur une droite normale au géoïde une même longueur  $H$ , qui définit une surface partout équidistante du géoïde (fig. 2.50.).**



L'altitude d'un point n'est donc pas la somme des dénivelées depuis le zéro jusqu'au point considéré soit :

$$H_a = \int_0^A dh .$$

On est ainsi obligé d'appuyer la notion d'altitude sur une grandeur indépendante du chemin suivi soit :

$W_{OA} = \int_0^A g \cdot dh$  où  $W_{OA}$  est le travail effectué contre la pesanteur par unité de masse.

Les divers systèmes d'altitudes consistent à diviser  $W_{OA}$  par une valeur conventionnelle de  $\gamma$ . Suivant les valeurs de  $\gamma$ , ont été définies successivement :

- l'altitude orthométrique**, définie par Charles Lallemant (1904–1978) ; dans ce cas  $\gamma$  est la valeur moyenne  $g_m$  entre le géoïde et le point A .
- l'altitude normale** est définie par l'IGN depuis 1969 ; dans ce cas  $\gamma$  est la valeur du champs de pesanteur dit normal calculé pour une terre théorique ellipsoïdique. La surface



de référence n'est pas exactement le géoïde mais une surface proche du géoïde appelée quasi-géoïde<sup>1</sup>.

Les problèmes liés à l'altimétrie et la définition de sa référence sont plus complexes qu'il n'y paraît au premier abord ; ils font l'objet d'une abondante littérature<sup>2</sup>.

### 6.3 Définition du zéro du NPF IGN 69

Le NPF est le Nivellement de Précision de la France.

La surface de référence d'altitude zéro est la seule qui serve vraiment au topographe. Il s'agit d'une surface ayant une altitude constamment nulle vis-à-vis d'un système d'altitudes donné. C'est théoriquement le géoïde bien que cette surface subit des déformations dues aux défauts des observations provenant des erreurs systématiques, des mouvements des repères en raison de l'instabilité du sol, etc.

Il semble qu'aujourd'hui les surfaces d'altitude zéro des nivellements Lallemand et IGN 69 aient, par rapport au géoïde, des pentes sensiblement Nord-Sud de part et d'autre de celui-ci sans que l'on ait vraiment compris pourquoi. D'où des discordances entre altitudes anciennes et nouvelles d'un même repère, de l'ordre de 30 cm à Paris.

Pour déterminer le niveau moyen des mers, ont été placés, sur les côtes françaises, 19 marégraphes et 11 médimarémètres.

Un **marégraphe** est un appareil enregistrant automatiquement les variations du niveau de la mer en un point donné afin de permettre la détermination de son niveau moyen. Le **marégraphe totalisateur de Marseille** permet, par l'enregistrement de la courbe de la marée, le calcul immédiat du niveau moyen de la mer pendant un intervalle de temps quelconque. Il est situé à Marseille, sur la promenade de la Corniche, entre la pointe d'Endoume et la plage du Prado.

Un **médimarémètre** est un appareil inventé par Charles Lallemand, qui permet de mesurer le niveau moyen de la mer. Il est constitué d'un tube aboutissant à un plongeur formé d'une cloison poreuse. Les marées sont amorties et décalées dans le temps, mais l'oscillation de l'eau se fait autour du même niveau moyen que celui de la mer. Les mesures de hauteurs d'eau sont effectuées au moyen d'une sonde.

Le **repère fondamental d'altitude 1,66 m**, en France, est placé près du **marégraphe totalisateur** qui, par l'enregistrement de la courbe de la marée, permet le calcul immédiat du niveau moyen de la mer pendant un intervalle de temps quelconque.

---

<sup>1</sup> Voir les articles de DUQUENNE et KASSER consacrés au nivellement dans la revue *Géomètre*, n° 6 de juin 1998. Voir aussi la publication de DUQUENNE du LAREG (Laboratoire de Recherche en Géodésie de l'IGN) : *Champs de pesanteur, géoïde et altimétrie : concepts fondamentaux*, janvier 1997.

<sup>2</sup> Voir les articles *Le nivellement de précision à l'échelle de la France*, revue *Géomètre*, n° 2, 1995 et *Le nivellement IGN 69*, revue *XYZ* n° 2.

Il existe en France **19 marégraphes** simples qui enregistrent les variations du niveau de la mer pour permettre de déterminer son niveau moyen (voir fig. 2.51-a.).

Il existe aussi **11 médimarémètres** permettant de mesurer le niveau moyen des mers.

## **6.4 Constitution du réseau actuel (IGN 69)**

### **6.4.1 Bref historique**

La France a été couverte par trois nivellements successifs.

- d'abord le nivellement de Bourdaloue (§ 6.4.2) : conçu en une dizaine d'années, observé entre 1857 et 1864, il est constitué de 15 000 km de cheminements.
- le Nivellement Général de la France (NGF) de Lallemant, observé de 1884 à 1968.
- enfin, le Nivellement de Précision de la France NPF IGN 69, achevé depuis 1969 (1978 pour la Corse).

### **6.4.2 Réseau Bourdaloue**

Paul-Olivier Bourdaloue établit de 1857 à 1864 le premier réseau français de nivellement direct constitué de 15 000 km de cheminements. Le « zéro Bourdaloue » était au Fort Saint-Jean à Marseille, et les hauteurs au-dessus de ce point considéré comme le niveau moyen de la Méditerranée ont été appelées « altitudes Bourdaloue ».

### **6.4.3 Nivellement Général de la France NGF**

En 1884, Charles Lallemant a été chargé d'un nouveau Nivellement Général de la France (NGF) destiné à vérifier et compléter le réseau Bourdaloue.

Ce réseau NGF a été utilisé jusqu'en 1969 ; or les repères d'un réseau de nivellement « vieillissent » rapidement : alors qu'un réseau géodésique peut être considéré comme à peu près satisfaisant lorsque sa précision est de l'ordre de 4 ou 5 cm, un nivellement exige de ses repères une précision relative de l'ordre du millimètre. Un nivellement doit faire l'objet d'observations fréquentes car une stabilité des repères de l'ordre du millimètre se perd en quelques années, par exemple par les mouvements propres (tassements) des immeubles sur lesquels ils sont fixés, par les travaux qui les déplacent ou les détruisent (travaux d'aménagement, affaissement de certaines zones), par les variations d'ordre tectonique également.

De nombreux repères ont bougé de 4 à 5 cm, d'autres ont disparu, d'autres ont été déplacés à l'insu de l'utilisateur ; de plus, la référence du NGF est formée par un ensemble de repères à Marseille dont l'altitude est considérée comme fixe depuis 1897 (depuis, le niveau moyen de la Méditerranée a augmenté de plus de 10 cm).

#### 6.4.4 Reprise du NGF et nouveau réseau IGN 69

Ainsi, vers 1960, les ingénieurs généraux géographes Maillard et Levallois proposent de reprendre le réseau de nivellement. La mise au point du squelette, c'est-à-dire les 12 000 km de 1<sup>e</sup> ordre, a été achevée en 1969. Pour le distinguer du précédent, l'habitude est prise d'appeler ce réseau **le réseau IGN 69**. La distinction entre ces deux réseaux n'était pas de pure forme puisque les réseaux Lallemant et IGN 69 sont affectés d'erreurs systématiques dont l'origine est encore mal connue ; un écart de 60 cm séparait les valeurs de l'altitude des repères dans la région de Dunkerque par rapport à Marseille, l'écart se propageant assez régulièrement du Sud vers le Nord ; il atteignait 32 cm dans la région parisienne. **On avait donc deux systèmes d'altitude différents.**

### 6.5 Le réseau altimétrique national

Le nivellement de précision de la France est appelé NPF IGN 69.

L'altitude des repères de nivellement étant déterminée à partir d'observations effectuées par nivellement direct, leur réseau ne peut être le même que le réseau planimétrique en vigueur NTF. **Le Réseau Altimétrique National actuel NPF IGN 69 est indépendant de la NTF** (Nouvelle Triangulation Française).

Les observations de nivellement direct utilisant des mires de hauteur limitée ( $\leq 4$  m), il est indispensable que les pentes entre les repères soient faibles ; aussi, contrairement aux points du réseau géodésique, les repères altimétriques se trouvent le long des voies de communication présentant des pentes faibles (voies ferrées, routes, canaux, rivières etc.). Les repères ne sont pas ici aux sommets des triangles du réseau géodésique (souvent des points élevés), mais situés aux bords des voies ou des cours d'eau ; les cheminements définissent de véritables mailles appelées **mailles de nivellement** (voir carte fig. 2.51-a).

Il est souhaitable que la densité des repères altimétriques soit suffisante pour l'utilisateur sans être trop importante à cause du prix de revient de leur mise en place (implantation, observations, maintenance) ; et comme les visées ne peuvent être faites sur de grandes distances, la seule possibilité pour améliorer la précision et éviter une trop importante accumulation des erreurs est de décomposer le canevas altimétrique en différents ordres de précision dégressive. Dans les ordres supérieurs, il est nécessaire d'utiliser des appareils plus précis et des méthodes plus complexes assurant de nombreuses vérifications et répétitions.

Les repères de nivellement sont sur des **lignes de nivellement** à raison d'un tous les 700 m à 4 km environ. Le réseau a été subdivisé en quatre types de réseaux ; les itinéraires de nivellement sont appelés **lignes** pour le 1<sup>er</sup>, le 2<sup>e</sup> et le 3<sup>e</sup> ordre, et **traverses** pour le 4<sup>e</sup> ordre. Les lignes de 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> ordre sont subdivisées en **sections**.



- repères immatriculés : AB 2 (2 étant le numéro d'ordre) ;
- point de jonction de trois polygones A, B et C par exemple ABC.

### 6.5.2 Le réseau de deuxième ordre

Le réseau de 2<sup>e</sup> ordre est constitué de 18 786 km de nivellement dont les lignes constituent en moyenne sept mailles à l'intérieur de chaque polygone.

L'immatriculation des repères est la suivante :

- section de 2<sup>e</sup> ordre commune à deux mailles immatriculées a, d à l'intérieur du polygone A : Aad ;
- repère immatriculé : Aad 11 ;
- point à la jonction de trois mailles a, b et c de A, par exemple Aabc.

### 6.5.3 Le réseau de troisième ordre

Le réseau de 3<sup>e</sup> ordre est constitué de 49 730 km de nivellement dont les lignes constituent en moyenne 10 mailles à l'intérieur de chaque maille de 2<sup>e</sup> ordre.

L'immatriculation des repères est la suivante :

- section de 3<sup>e</sup> ordre commune à deux mailles immatriculées  $a_3$  et  $b_3$  à l'intérieur d'une maille de 2<sup>e</sup> ordre c :  $Aca_3b_3$  ;
- repère immatriculé :  $Aca_3b_3$  7.

### 6.5.4 Le réseau de quatrième ordre

Il est constitué de 350 000 km environ de lignes de nivellement appelées traverses.

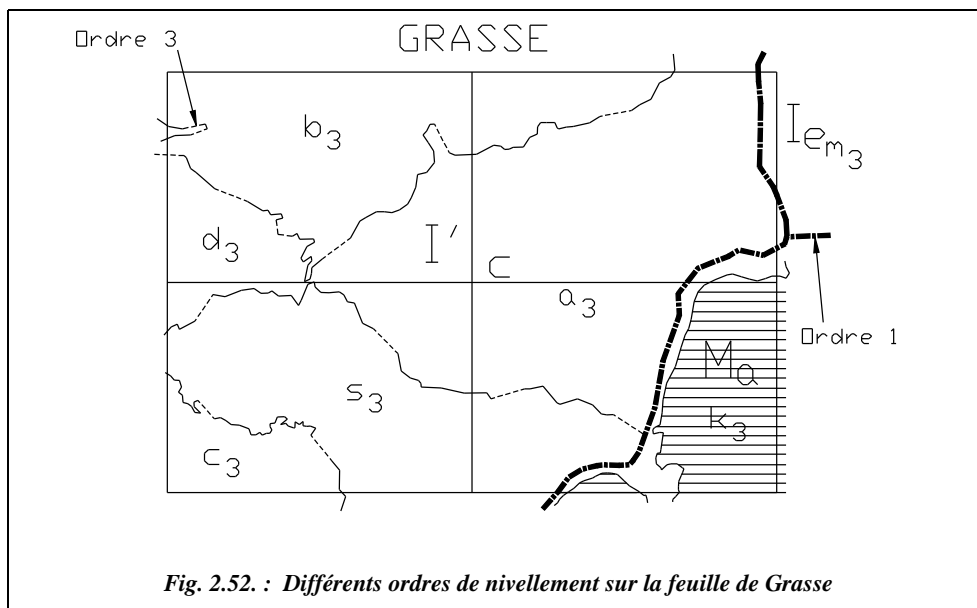
L'immatriculation des repères est la suivante :

- traverse de 4<sup>e</sup> ordre située à l'intérieur de la maille de 3<sup>e</sup> ordre  $d_3$  :  $Acd_3$  ;
- repère immatriculé :  $Acd_3$  4.

#### Remarque

Sur la figure 2.52., on ne distingue pas de maille du 2<sup>e</sup> ordre du fait de la taille réduite de la zone étudiée.

Pour connaître le réseau local de nivellement, il faut disposer d'une carte IGN et d'une feuille de calque maillé (fig. 2.52.) qui donne, par superposition, la position des points de nivellement.



## 6.6 Passer des observations aux altitudes normales

Le réseau Lallemand est un système d'**altitudes orthométriques**, le réseau IGN 69 un système d'**altitudes normales**. À partir des observations des réseaux dont le principe est le nivellement direct par cheminement, on peut se demander comment obtenir des altitudes dites « orthométriques » ou « normales ».

### 6.6.1 Réseau Lallemand

Pour tenir compte du non-parallélisme des surfaces de niveau ( $AB' \neq A'B$  voir fig. 2.48.), on apporte aux dénivelées observées une correction orthométrique :  $C_{ort} = AB'A'B = AB' \cdot (1 - g_a/g_b)$  où  $g_a$  et  $g_b$  sont respectivement les valeurs moyennes de l'accélération de la pesanteur entre A et B' et entre A' et B.

### 6.6.2 Réseau du premier, deuxième et troisième ordre en haute et moyenne montagne

Les dénivelées observées  $\Delta h_0$  par tronçon sont d'abord transformées en **dénivelées dites dynamiques**  $\Delta h_d$  en utilisant la moyenne  $g$  des accélérations **g observées** aux extrémités de chaque tronçon par une correction dite **correction dynamique** :

$$C_d = \Delta h_d - \Delta h_0 = \frac{g \cdot \Delta h_0}{g_{0,50}} - \Delta h_0 = \frac{g - g_{0,50}}{g_{0,50}} \cdot \Delta h_0$$

avec  $g_{0,50} = 9,806\,29 \text{ m/s}^2$  : valeur conventionnelle de la pesanteur au niveau 0 et à la latitude 50 gon.

**Les dénivelées dynamiques  $\Delta h_d = \Delta h_0 + C_d$** , où  $\Delta h_0$  est la dénivelée observée et  $C_d$  la correction définie ci-dessus, sont compensées par la méthode des moindres carrés avec fermeture des polygones. Les dénivelées corrigées permettent alors d'obtenir les **altitudes dynamiques  $H_d$  des nœuds du réseau**. La correction de compensation pour une section est proportionnelle au nombre de nivelées, d'où la détermination des **altitudes dynamiques  $H_d$  de tous les repères**.

**Les altitudes dynamiques des repères sont enfin transformées en altitudes normales**

$H_n : H_n = H_d \frac{g_{0,50}}{\gamma_m}$ ,  $\gamma_m$  étant la valeur théorique de la pesanteur à l'altitude  $\frac{H}{2}$  sur la

verticale du point :  $\gamma_m = \gamma_0 \cdot \left[1 - \frac{H}{R}\right]$  avec  $\gamma_0 = g_{0,50} \cdot (1 - 0,002\,637\,2 \cdot \cos(2\varphi))$ .

Finalement : 
$$H_n = \frac{H_d}{(1 - 0,002\,637\,2 \cdot \cos(2\varphi)) \left[1 - \frac{H}{R}\right]}$$
 avec  $\varphi$  : latitude du lieu  
 $H_n$  : altitude normale  
 $H_d$  : altitude dynamique  
 $H$  : altitude moyenne  
 $R$  : rayon moyen terrestre

### 6.6.3 Réseau du deuxième et troisième ordre en région de plaine

Dans ce cas, les altitudes dynamiques ne sont pas calculées puisque les dénivelées normales sont très voisines des dénivelées orthométriques. Les dénivelées orthométriques compensées permettent de déterminer, à partir des altitudes normales des repères du premier ordre, les **altitudes normales** de tous les nœuds des réseaux de deuxième et troisième ordre. Puis les corrections de compensation sont réparties afin de déterminer les **altitudes normales** des autres repères.

### 6.6.4 Réseau du quatrième ordre

**En plaine**, aucune correction orthométrique n'est calculée et l'on procède au calcul comme précédemment.

**En montagne**, le calcul est identique à celui du deuxième et troisième ordre.

## 6.7 Les repères de nivellement



Fig. 2.52-a. : Repère de nivellement

Les altitudes des repères obtenues grâce à des travaux coûteux doivent être conservées avec le plus de sécurité possible. Les repères ont dû être placés sur des édifices publics : mairies, églises, gares, sur des ponts et, à défaut, sur des immeubles privés (ci-contre un repère IGN scellé sur le mur de l'église Sainte-Thérèse d'Antibes ; diamètre réel : 75 mm).

Lorsqu'un repère disparaît, il est très facile de le rétablir à partir des points les plus proches. Les travaux sont moins importants que pour un point de triangulation.

Ci-dessous (fig. 2.53.), sont les repères du service du nivellement général de la France.

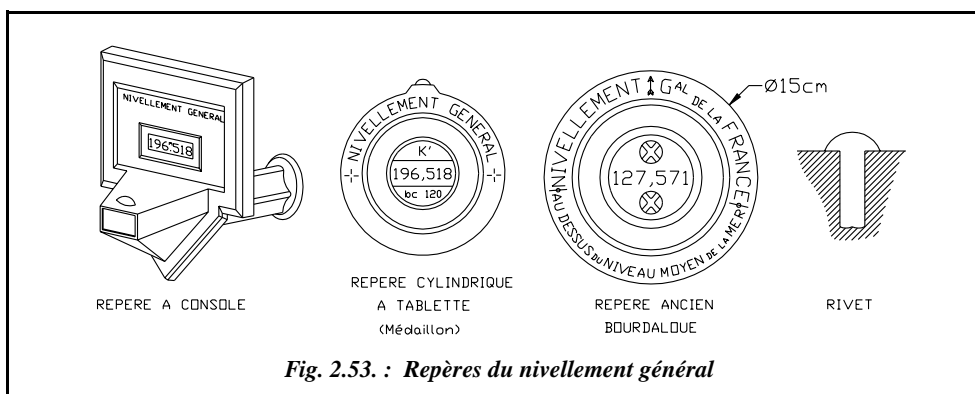


Fig. 2.53. : Repères du nivellement général

Ces repères sont nommés par leur initiale : M pour Médailon (ou Macaron), B pour Bourdaloue, R pour Rivet, C pour Console.

## 6.8 Répertoires de nivellement

L'IGN publie un extrait de carte au 1/50 000 accompagné d'un calque superposable comportant le tracé des cheminements et l'indication des différents repères avec leur numéro ; puis sont fournis les répertoires de tous les points des 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> ordre.

Sur la plupart des fiches des repères (celles établies avant 1969), les altitudes dites orthométriques sont rayées mais laissées lisibles (voir fig 2.54.) ; elles sont encore utilisées car tous les nivellements établis avant 1969 sont rattachés à ce système d'altitude. Les nouvelles altitudes, dites normales, sont indiquées en dessous.



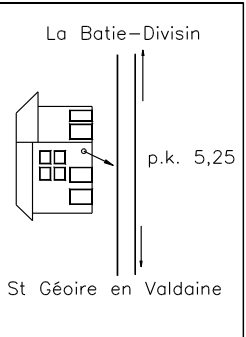
La mention « **altitude normale** » est portée sur les fiches d'identification des repères de nivellement IGN 69.

#### Remarque

Un service minitel de l'IGN (08 36 29 01 29 à 9,21F/minute au 1/1/98) permet d'accéder à des fiches informatisées. La recherche s'effectue soit par commune soit par centroïde (recherche des repères les plus proches d'un point de coordonnées Lambert données : les recherches s'effectuent dans un rayon de trois kilomètres autour du point donné).

En 1997, l'IGN a vérifié ou réfectionné les repères de nivellement implantés le long de 4948 km de routes ou voies ferrées dans le centre de la France, en Normandie et en Bretagne. La documentation relative à environ 23 000 repères a été intégrée dans la base de données, ce qui porte à 382 000 le nombre de repères accessibles par minitel (l'accès par internet n'est pas encore possible à ce jour).

4eme ordre	857.6	359.0
Matricule	Type de repère	Altitude
R'c.n <sub>3</sub> - 73	M	<del>565.37</del> 565.62 <sub>5</sub>
	1946	
Feuille au 50.000e VOIRON - N.E N° 3233		
Département: ISERE Commune: St Géoire en Valdaine Voie suivie: D.28 Désignation: Maison Cleyet-Merle Laurent, au lieu dit le Platon.		



**Fig. 2.54. : Extrait de répertoire de points de nivellement**

## 6.9 Précision

Les mesures ont été conduites pour assurer la meilleure précision possible à l'ensemble du réseau.

Ordre	Erreur probable kilométrique (mm)	Écart type en mm/(km) <sup>1/2</sup> *	Tolérance en mm/(km) <sup>1/2</sup> *
1 <sup>er</sup>	1,3	2	5,2
2 <sup>e</sup>	1,5	2,3	6
3 <sup>e</sup>	2	3	8
4 <sup>e</sup>	2,4	3,6	9,6

Pour une distance  $D$  exprimée en km entre deux repères, l'écart type de mesure vaut :

- premier ordre  $(2\sqrt{D})$  mm,
- deuxième ordre  $(2,3\sqrt{D})$  mm,
- troisième ordre  $(3\sqrt{D})$  mm,
- quatrième ordre  $(3,6\sqrt{D})$  mm.